In English

Jordan Journal of Physics. Vol. 14, No. 5, pp. 379-408 (2021).
https://doi.org/10.47011/14.5.1.

Электромагнитное поле за пределами равномерно вращающейся релятивистской однородной системы

Федосин Сергей Григорьевич
ул. Свиязева 22-79, город Пермь, 614088, Пермский край, Россия
e-mail: fedosin@hotmail.com

Методом запаздывающих потенциалов получены приблизительные формулы, описывающие электромагнитное поле за пределами релятивистской однородной системы в виде вращающейся с постоянной скоростью заряженной сферы. Для ближней, средней и дальней зоны найдены соответствующие выражения для скалярного и векторного потенциалов, а также для электрического и магнитного полей. Затем эти выражения оцениваются на соответствие уравнениям Лапласа для потенциалов и полей. Одной из целей является проверка истинности предположения о том, что скалярный потенциал и электрическое поле не зависят ни от величины скорости углового вращения сферы, ни от направления на ту точку, где измеряется поле. Однако расчёты показывают, что потенциалы и поля увеличиваются по мере приближения точки наблюдения к экватору сферы и к поверхности самой сферы, по сравнению со случаем для неподвижной сферы. При этом добавки пропорциональны квадрату угловой скорости вращения, квадрату радиуса сферы и обратно пропорциональны квадрату скорости света. Наибольшее найденное относительное увеличение потенциалов и полей могло бы достигнуть величины 4 % для быстровращающейся нейтронной звезды PSR J1614–2230, если бы звезда была заряжена. Для протона аналогичное увеличение полей на его поверхности вблизи экватора достигает 54 %.

Ключевые слова: электромагнитное поле; релятивистская однородная система; вращение.

The electromagnetic field outside the steadily rotating relativistic uniform system

Sergey G. Fedosin

PO box 614088, Sviazeva str. 22-79, Perm, Perm Krai, Russia

E-mail: fedosin@hotmail.com

Abstract: Using the method of retarded potentials approximate formulas are obtained that describe the electromagnetic field outside the relativistic uniform system in the form of a charged sphere rotating at a constant speed. For the near, middle and far zones the corresponding expressions are found for the scalar and vector potentials, as well as for the electric and magnetic fields. Then these expressions are assessed for correspondence to the Laplace equations for potentials and fields. One of the purposes is to test the truth of the assumption that the scalar potential and the electric field depend neither on the value of the angular velocity of rotation of the sphere nor on the direction to the point where the field is measured. However, calculations show that potentials and fields increase as the observation point gets closer to the sphere's equator and to the sphere's surface, compared with the case for a stationary sphere. In this case, additions are proportional to the square of the angular velocity of rotation, the square of the sphere's radius and inversely proportional to the square of the speed of light. The largest found relative increase in potentials and fields could reach the value of 4% for the rapidly rotating neutron star PSR J1614-2230, if the star were charged. For a proton, a similar increase in fields on its surface near the equator reaches 54%.

Keywords: electromagnetic field; relativistic uniform system; rotation.

1. Введение

В статье [1] подчёркивается, что в большинстве случаев вычисление компонент электромагнитного поля быстро изменяющихся токов крайне сложно. Даже в простых конфигурациях движущихся зарядов появляются не элементарные интегралы, не выражаемые в простых функциях. Самым простым примером является виток с током, и уже здесь приходится иметь дело с эллиптическими интегралами. Для определения компонент поля в [1] интегрировали уравнения Максвелла для векторного потенциала с помощью преобразований Лапласа и находили решение в виде суммы через полиномы Лежандра для заряженной сферической оболочки при её вращении в разных случаях, включая изменение конфигурации заряда на поверхности и ускоренное вращение.

Решение для вращающейся равномерно заряженной поверхности сферы можно найти в [2], где магнитное поле было выражено как вектор в сферической системе отсчёта. В [3] векторный потенциал и магнитное поле вычисляются для однородно заряженной вращающейся сферы. Более сложная ситуация, когда вещество внутри сферы или цилиндра является проводником и при вращении появляется дополнительный заряд от центростремительной силы и инерции электронов, рассматривается в [4-5].

В [6] изучалось вращающееся цилиндрическое распределение зарядов и получено решение для магнитных и электрических полей вокруг вращающейся сферы. Затем в [7] было найдено общее решение для симметричных вращающихся распределений заряда.

В отличие от этих работ, мы рассматриваем не просто однородно заряженное вещество, распределённое внутри сферы или в её оболочке, а релятивистскую однородную систему. Это означает, что вещество в объеме сферы находится в равновесии с силами гравитации, поля давления и поля ускорений, а заряженные частицы могут двигаться хаотически и имеют одну и ту же инвариантную плотность заряда. Если такая система частиц вращается с некоторой постоянной угловой скоростью, это приводит к соответствующему векторному потенциалу и магнитному полю, которые не зависят от времени. Мы будем вычислять все компоненты электромагнитного поля за пределами системы, включая скалярный и векторный потенциалы, электрическое и магнитное поля. Ранее эти величины были найдены в [8-12] для случая покоящейся однородной системы без вращения, в которой векторные потенциалы получаются равными нулю.

Изучение вращающейся релятивистской однородной системы важно само по себе и представляет академический интерес с точки зрения развития идеальной модели, соответствующей релятивистскому подходу. Но имеется и ряд физических задач, таких как вычисление момента импульса, магнитного момента, релятивистской энергии вращающихся объектов, где необходимо корректно оценивать вклады различных полей, связанных с этими объектами.

Как правило в статьях, описывающих равномерно вращающуюся сферическую оболочку, предполагается, что электрическое поле за пределами сферы не зависит от угловой скорости вращения. В противоположность этому, в [13] было указано на такую зависимость как для электрического, так и для магнитного поля. В [14] был снова рассмотрен этот вопрос и найдена ошибка в расчётах в [13], связанная с заменой частной производной по времени на полную производную.

Чтобы проверить предположение о возможной зависимости полей от угловой скорости вращения и оценить вклад от движения частиц внутри системы, точность наших вычислений будет увеличена до появления членов, содержащих в знаменателе квадрат и даже третью степень скорости света. Используемый для расчётов метод запаздывающих потенциалов даёт результат, исходя из первых принципов, что уменьшает возможные неточности, появляющиеся при дополнительных допущениях.

2. Постановка задачи

Стандартные уравнения для напряжённости $\mathbf{E}$ электрического поля, индукции $\mathbf{B}$ магнитного поля и потенциалов электромагнитного поля в рамках специальной теории относительности имеют следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\gamma \rho_{0q}}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{1}$$

$$\partial_\beta \partial^\beta \varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \frac{\gamma \rho_{0q}}{\varepsilon_0}, \qquad \partial_\beta \partial^\beta \mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \tag{2}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad A_\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, -\mathbf{A}\right). \tag{3}$$

Для движущихся внутри вращающейся сферы частиц $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ есть фактор Лоренца; $\mathbf{v}$ – скорость частиц в системе отсчёта K, в которой вращается сфера; ρ_{0q} – плотность заряда движущейся частицы в сопутствующей ей системе отсчёта; ε_0 – электрическая постоянная; μ_0 – магнитная постоянная; $\mathbf{j} = \gamma \rho_{0q} \mathbf{v}$ обозначает вектор плотности электрического тока; c – скорость света, причём $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$; A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля; φ и $\mathbf{A}$ – скалярный и векторный потенциалы. Волновые уравнения (2) для потенциалов получаются из уравнений (1) с учётом (3).

Если сфера вместе с частицами вращается с постоянной угловой скоростью ω, потенциалы не будут зависеть от времени. Тогда в (2) исчезают производные по времени и остаётся следующее:

$$\Delta\varphi = -\frac{\gamma\rho_{0q}}{\varepsilon_0}, \qquad\qquad \Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} = -\mu_0\gamma\rho_{0q}\mathbf{v}. \tag{4}$$

Уравнения (4) решались в отсутствие вращения, когда $\omega = 0$, для релятивистской однородной системы [11]. При этом вместо γ в (4) подставлялся фактор Лоренца γ' движения частиц относительно системы отсчёта K', связанной с центром неподвижной сферы. Для сферической системы с частицами в отсутствие общего вращения вещества фактор Лоренца согласно [8] равен:

$$\gamma'(\omega = 0) = \frac{c\gamma'_c}{r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) \approx \gamma'_c - \frac{2\pi\eta\rho_0 r^2\gamma'_c}{3c^2}. \tag{5}$$

В (5) r есть текущий радиус, γ'_c – фактор Лоренца в центре сферы, η – коэффициент поля ускорений, ρ_0 – плотность массы движущейся частицы в сопутствующей ей системе отсчёта. С учётом этого скалярный (электрический) потенциал φ_i внутри сферы и аналогичный потенциал φ_o за пределами сферы определяются выражениями:

$$\varphi_i = \frac{\rho_{0q}c^2\gamma'_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - r\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right] \approx \frac{\rho_{0q}\gamma'_c(3a^2 - r^2)}{6\varepsilon_0}. \tag{6}$$

$$\varphi_o = \frac{\rho_{0q}c^2\gamma'_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - a\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right].$$

$$\varphi_o = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 r} \approx \frac{q\gamma'_c}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{3\eta m}{10ac^2}\right). \tag{7}$$

В (7) величина q есть произведение ρ_{0q} на объём V_s сферы радиуса a, то есть $q = \frac{4\pi\rho_{0q}a^3}{3}$. Аналогично, m есть произведение инвариантной плотности массы ρ_0

частиц вещества на объём сферы. Однако внешний потенциал φ_o электрического поля зависит не от q, а от полного заряда q_b сферы, определяемого выражением:

$$q_b = \rho_{0q}\int \gamma'(\omega=0)dV_s = \frac{\rho_{0q}c^2\gamma'_c}{\eta\rho_0}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - a\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right] \approx$$
$$\approx \frac{4\pi\rho_{0q}a^3\gamma'_c}{3}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 a^2}{5c^2}\right) = q\gamma'_c\left(1-\frac{3\eta m}{10ac^2}\right)$$

(8)

Что касается векторного (магнитного) потенциала $\mathbf{A}$ в (4), то в среднем он оказывается везде равным нулю вследствие хаотического движения частиц.

Вращение частиц с угловой скоростью ω относительно оси OZ, проходящей через центр сферы, изменяет линейные скорости частиц. Учитывая правило релятивистского сложения скоростей, для абсолютной скорости и фактора Лоренца произвольной частицы находим:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}' + \dfrac{(\gamma_r - 1)(\mathbf{v}'\mathbf{v}_r)}{v_r^2}\mathbf{v}_r + \gamma_r\mathbf{v}_r}{\gamma_r\left(1+\dfrac{\mathbf{v}'\mathbf{v}_r}{c^2}\right)}, \qquad \gamma = \gamma'\gamma_r\left(1+\frac{\mathbf{v}'\mathbf{v}_r}{c^2}\right), \tag{9}$$

где $\mathbf{v}'$ есть скорость хаотического движения частицы в системе отсчёта K', вращающейся вместе с веществом с угловой скоростью ω ; $\mathbf{v}_r$– линейная скорость движения системы отсчёта K' в месте расположения частицы, возникающая за счёт вращения в системе отсчёта K; $\gamma_r = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_r^2/c^2}}$ – фактор Лоренца для скорости $\mathbf{v}_r$, $\gamma' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$ – фактор Лоренца для скорости $\mathbf{v}'$.

Выражения (9) следует усреднить по объёму в небольшой окрестности вокруг рассматриваемой точки так, чтобы в этом объёме присутствовало достаточное количество частиц. Ввиду хаотичности движения скорости $\mathbf{v}'$ соседних частиц направлены в разные стороны. В результате средние величины будут равны: $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_r$,

$\bar{\gamma} = \gamma' \gamma_r$. Далее мы будем предполагать, что несмотря на общее вращение, в системе отсчёта K' продолжает быть действительной формула (5) для γ' с тем исключением, что вместо фактора Лоренца в центре сферы γ'_c в формуле должна быть величина, обозначаемая как γ_c. Действительно, γ'_c определяется в отсутствие вращения, но фактор Лоренца в центре сферы может быть изменён за счёт вращения и превратиться в γ_c.

2.1. Потенциалы за пределами вращающейся сферы

Плотность ρ_{0q} заряда вне сферы равна нулю ввиду отсутствия там заряженных частиц. Это упрощает вид уравнений (4), и они переходят в уравнения Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0, \qquad\qquad \Delta \mathbf{A} = 0. \tag{10}$$

Из множества возможных решений уравнений (10) следует выбрать такие, которые при отсутствии вращения переходят в решение (7) для скалярного потенциала φ_o и в решение $\mathbf{A}_o = 0$ для векторного потенциала.

Чтобы найти нужные решения, используем подход Лиенара-Вихерта для запаздывающих потенциалов. Пусть точечная заряженная частица вращается по окружности радиуса ρ с угловой скоростью ω и с линейной скоростью $v_r = \omega \rho$. Расположим цилиндрическую систему отсчёта с координатами ρ, ϕ, z_d в центре сферы и будем искать потенциалы электромагнитного поля от вращающегося заряда в некоторой удалённой точке P с радиусом-вектором $\mathbf{R} = (x, y, z)$.

Текущее положение заряда задаётся радиус-вектором

$$\mathbf{r}_q = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi, z_d) = \left[\rho \cos\left(\omega t + \phi_0\right), \rho \sin\left(\omega t + \phi_0\right), z_d\right],$$

так что окружность вращения параллельна плоскости XOY, при этом угол ϕ зависит от текущего времени: $\phi = \omega t + \phi_0$, здесь постоянная ϕ_0 есть начальная фаза.

Вектор от заряда до точки P будет:

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R} - \mathbf{r}_q = \left[x - \rho \cos\left(\omega t + \phi_0\right), y - \rho \sin\left(\omega t + \phi_0\right), z - z_d\right],$$

при этом

$$R_P = \sqrt{\left(x-\rho\cos\phi\right)^2+\left(y-\rho\sin\phi\right)^2+\left(z-z_d\right)^2} = \\ = \sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2-2\rho x\cos\phi-2\rho y\sin\phi}. \tag{11}$$

Формулы Лиенара-Вихерта для скалярного и векторного потенциалов одной частицы с номером n имеют следующий вид:

$$\varphi_n = \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0\left(\hat{R}_P-\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{R}}_P/c\right)}, \qquad \mathbf{A}_n = \frac{\mu_0 q_n\hat{\mathbf{v}}}{4\pi\left(\hat{R}_P-\hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{R}}_P/c\right)}. \tag{12}$$

Здесь $\hat{\mathbf{R}}_P = \mathbf{R}-\hat{\mathbf{r}}_q$ − вектор от заряда до точки P в ранний момент времени $\hat{t} = t-\frac{\hat{R}_P}{c}$, радиус-вектор

$$\hat{\mathbf{r}}_q = (\rho\cos\hat{\phi}, \rho\sin\hat{\phi}, z_p) = \left[\rho\cos\left(\omega\hat{t}+\phi_0\right), \rho\sin\left(\omega\hat{t}+\phi_0\right), z_d\right]$$

задаёт положение заряда в момент времени $\hat{t}$, при этом

$$\hat{R}_P = \sqrt{\left(x-\rho\cos\hat{\phi}\right)^2+\left(y-\rho\sin\hat{\phi}\right)^2+\left(z-z_d\right)^2}.$$

Текущая скорость вращения заряда есть $\mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} = (-\omega\rho\sin\phi, \omega\rho\cos\phi, 0)$, а скорость заряда в ранний момент времени будет $\hat{\mathbf{v}}_r = \mathbf{v}_r(\hat{t}) = \frac{d\hat{\mathbf{r}}_q}{d\hat{t}} = (-\omega\rho\sin\hat{\phi}, \omega\rho\cos\hat{\phi}, 0)$, причём $\hat{\phi} = \omega\hat{t}+\phi_0 = \omega t+\phi_0-\frac{\omega\hat{R}_P}{c} = \phi-\frac{\omega\hat{R}_P}{c} = \phi-\phi_P$.

Поскольку согласно (9) средняя скорость движения частиц $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_r$, вместо $\hat{\mathbf{v}}$ в (12) следует использовать $\hat{\mathbf{v}}_r$. Тогда для $\hat{R}_P$ и произведения $\hat{\mathbf{v}}_r\cdot\hat{\mathbf{R}}_P$ в (12) получаем:

$$\hat{R}_P = \sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2-2\rho x\cos\hat{\phi}-2\rho y\sin\hat{\phi}}, \qquad \hat{\mathbf{v}}_r\cdot\hat{\mathbf{R}}_P = \omega\rho y\cos\hat{\phi}-\omega\rho x\sin\hat{\phi}.$$

(13)

Зафиксируем координату z_d так, чтобы она задавала расположение тонкого слоя толщиной s в форме диска, параллельного плоскости XOY. Радиус такого диска внутри сферы будет $\rho_d = \sqrt{a^2 - z_d^2}$, где радиус сферы есть a. Сфера тесно заполнена вращающимися частицами, и это же относится к данному диску. Используем принцип суперпозиции потенциалов и найдём скалярный потенциал в удалённой точке P от вращающегося диска с заряженными частицами. Для этого необходимо взять сумму по всем N зарядам в диске. С учётом (12) для скалярного потенциала имеем:

$$\varphi_d = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{\left(\hat{R}_P - \hat{\mathbf{v}}_r \cdot \hat{\mathbf{R}}_P / c\right)_n}. \quad (14)$$

Каждый заряд q_n внутри диска имеет свои собственные радиус вращения ρ_n, скорость движения $v_n = \omega \rho_n$, при этом мгновенное положение заряда задаётся вектором $\mathbf{r}_{qn} = (\rho_n \cos\phi_n, \rho_n \sin\phi_n, z_d)$. В связи с этим в (14) знаменатель зависит от расположения частицы в диске и потому имеет индекс n.

Заряд вращающейся в диске точечной частицы можно выразить через инвариантную плотность заряда, фактор Лоренца и движущийся объём:

$$q_n = \frac{\rho_{0q} \gamma s \rho \, d\rho \, d\phi}{\gamma_r}.$$

Величина $\frac{s\rho \, d\rho \, d\phi}{\gamma_r}$ задаёт здесь элемент объёма вращающегося диска, который в результате Лоренцевского сокращения в γ_r меньше, чем элемент объёма $s\rho \, d\rho \, d\phi$ неподвижного диска. Величина $\rho_{0q}\gamma$ определяет эффективную плотность заряда с учётом его вращения внутри диска и с учётом хаотического движения частиц. В качестве γ следует подставить усреднённое значение фактора Лоренца $\bar{\gamma} = \gamma' \gamma_r$ согласно (9). Это даёт следующее:

$$q_n = \rho_{0q} \gamma' s \rho d\rho d\phi \,. \qquad (15)$$

Заряд q_n выражается через произведение дифференциалов, так что сумму (14) можно преобразовать в интеграл. С учётом этого из (13-15) следует:

$$\varphi_d = \frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \rho d\rho d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\hat{\phi} - 2\rho y \sin\hat{\phi}} + \frac{\omega\rho x \sin\hat{\phi}}{c} - \frac{\omega\rho y \cos\hat{\phi}}{c}} \,. \qquad (16)$$

Чтобы можно было произвести интегрирование, в (16) нужно выразить угол $\hat{\phi}$, задающий положение произвольной частицы в раннее время $\hat{t}$, через угол ϕ в момент времени t. Поскольку $\phi = \omega t + \phi_0$, $\hat{\phi} = \omega\hat{t} + \phi_0$, $\hat{t} = t - \frac{\hat{R}_P}{c}$, то будет $\hat{\phi} = \phi - \frac{\omega\hat{R}_P}{c}$, и значит

$$\cos\hat{\phi} = \cos\phi\cos\frac{\omega\hat{R}_P}{c} + \sin\phi\sin\frac{\omega\hat{R}_P}{c}, \qquad \sin\hat{\phi} = \sin\phi\cos\frac{\omega\hat{R}_P}{c} - \cos\phi\sin\frac{\omega\hat{R}_P}{c}. \qquad (17)$$

Из сравнения (12) и (16) следует, что векторный потенциал вращающегося диска будет равен:

$$\mathbf{A}_d = \frac{\mu_0 s\rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \hat{\mathbf{v}}_r \rho d\rho d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\hat{\phi} - 2\rho y \sin\hat{\phi}} + \frac{\omega\rho x \sin\hat{\phi}}{c} - \frac{\omega\rho y \cos\hat{\phi}}{c}} \,.$$

В (16) скалярный потенциал φ_d ищется для удалённой точки P с радиусом-вектором $\mathbf{R} = (x, y, z)$. Векторный потенциал $\mathbf{A}_d$ в этой точке зависит от скорости $\hat{\mathbf{v}}_r = \mathbf{v}_r(\hat{t}) = (-\omega\rho\sin\hat{\phi}, \omega\rho\cos\hat{\phi}, 0)$ движения заряженных частиц вращающегося диска в раннее время $\hat{t}$. Скорость $\hat{\mathbf{v}}_r$ лежит в плоскости, параллельной плоскости XOY, и это же следует для $\mathbf{A}_d$. Для компонент $\mathbf{A}_d$ можно записать:

$$A_{dx} = -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \sin\hat{\phi}\, \rho^2 d\rho d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\hat{\phi} - 2\rho y \sin\hat{\phi}} + \frac{\omega \rho x \sin\hat{\phi}}{c} - \frac{\omega \rho y \cos\hat{\phi}}{c}}.$$

$$A_{dy} = \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \cos\hat{\phi}\, \rho^2 d\rho d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\hat{\phi} - 2\rho y \sin\hat{\phi}} + \frac{\omega \rho x \sin\hat{\phi}}{c} - \frac{\omega \rho y \cos\hat{\phi}}{c}}.$$

$$A_{dz} = 0. \qquad (18)$$

2.2. Скалярный потенциал в средней зоне

Рассмотрим вначале случай, когда в (17) выполняются условия $\hat{R}_P >> a$, $\frac{\omega \hat{R}_P}{c} << 1$, что соответствует случаю достаточно больших расстояний R от сферы радиуса a до точки P, где ищется скалярный потенциал. Для примера предположим, что соотношения размеров и скоростей заданы относительной величиной в 1 %. В таком случае условие средней зоны при $R \approx \hat{R}_P$ означает, что должно быть $\frac{a}{R} < 0,01$ и $\frac{\omega R}{c} < 0,01$, так что для расстояния получается двустороннее неравенство $100a < R < \frac{c}{100\omega}$.

При указанных выше условиях для $\hat{R}_P$ можно считать в (17), что

$$\cos\hat{\phi} \approx \cos\phi + \frac{\omega \hat{R}_P}{c} \sin\phi, \qquad \sin\hat{\phi} \approx \sin\phi - \frac{\omega \hat{R}_P}{c} \cos\phi. \qquad (19)$$

Возведём в квадрат $\hat{R}_P$ в (13), подставим туда $\cos\hat{\phi}$ и $\sin\hat{\phi}$ из (19), получим квадратное уравнение для определения $\hat{R}_P$ и запишем его решение:

$$\hat{R}_P^2 + \frac{2\omega\rho\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)}{c} \hat{R}_P - R^2 - z_d^2 + 2zz_d - \rho^2 + 2\rho x \cos\phi + 2\rho y \sin\phi = 0.$$

$$\hat{R}_P = -\frac{\omega\rho\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)}{c} + \\ +\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi + \frac{\omega^2\rho^2\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2}{c^2}}. \tag{20}$$

Поскольку квадратный корень в (16) равняется $\hat{R}_P$ согласно (13), то можно заменить этот квадратный корень выражением для $\hat{R}_P$ из (20). Используя далее $\sin\hat{\phi}$ и $\cos\hat{\phi}$ из (19) для преобразования (16), приходим к выражению:

$$\varphi_d = \frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{\gamma'\rho d\rho d\phi}{\sqrt{\begin{array}{l}R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - \\ -2\rho y\sin\phi + \dfrac{\omega^2\rho^2\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2}{c^2}\end{array}} - \dfrac{\omega^2\rho x\hat{R}_P}{c^2}\cos\phi - \dfrac{\omega^2\rho y\hat{R}_P}{c^2}\sin\phi}. \tag{21}$$

Разложим в (21) квадратный корень до членов третьего порядка по правилу $\sqrt{1+\delta} \approx 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8}$:

$$\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi + \frac{\omega^2\rho^2\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2}{c^2}} \approx \\ \approx \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}\left[\begin{array}{l}1 - \dfrac{\rho x\cos\phi + \rho y\sin\phi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2} + \\ + \dfrac{\omega^2\rho^2\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2}{2c^2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)} - \dfrac{\rho^2\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)^2}{2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2} + \\ + \dfrac{\omega^2\rho^3\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)}{2c^2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2}\end{array}\right]. \tag{22}$$

Подставим (22) в (20):

$$\hat{R}_P \approx \sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}\left[\begin{array}{l} 1-\dfrac{\omega\rho\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)}{c\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}-\dfrac{\rho x\cos\phi+\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}+ \\ +\dfrac{\omega^2\rho^2\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}-\dfrac{\rho^2\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}+ \\ +\dfrac{\omega^2\rho^3\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2} \end{array}\right]. \qquad (23)$$

С помощью $\hat{R}_P$ из (23) преобразуем второй и третий члены в знаменателе (21), оставляя лишь члены, содержащие c^2 и c^3:

$$-\frac{\omega^2\rho x\hat{R}_P}{c^2}\cos\phi-\frac{\omega^2\rho y\hat{R}_P}{c^2}\sin\phi \approx$$
$$\approx -\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}\left[\begin{array}{l} \dfrac{\omega^2\rho\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{c^2}- \\ -\dfrac{\omega^3\rho^2\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{c^3\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}- \\ -\dfrac{\omega^2\rho^2\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}-\dfrac{\omega^2\rho^3\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^3}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2} \end{array}\right]. \qquad (24)$$

Подставим теперь (22) и (24) в (21) и вынесем за скобку $\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}$:

$$\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d} \frac{1}{\left[\begin{array}{l} 1-\dfrac{\rho\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}-\dfrac{\rho^2\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}- \\ -\dfrac{\omega^2\rho\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{c^2}+ \\ +\dfrac{\omega^2\rho^2\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}+\dfrac{\omega^2\rho^2\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}+ \\ +\dfrac{\omega^2\rho^3\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}+ \\ +\dfrac{\omega^2\rho^3\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^3}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}+ \\ +\dfrac{\omega^3\rho^2\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{c^3\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}} \end{array}\right]}\frac{\gamma'\rho\,d\rho\,d\phi}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}.$$

Используем в данном интеграле приблизительное выражение вида $\dfrac{1}{1+\delta}\approx 1-\delta+\delta^2$ для малых δ. Это даёт:

$$\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{D\gamma'\rho\,d\rho\,d\phi}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}\,. \qquad (25)$$

Величина D в (25) определяется выражением:

$$D \approx 1+\frac{\rho x\cos\phi+\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}+\frac{3\rho^2\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}+\frac{\rho^3\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^3}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}+$$
$$+\frac{\rho^4\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^4}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^4}+\frac{\omega^2\rho\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{c^2}-\frac{\omega^2\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}+$$
$$+\frac{3\omega^2\rho^2\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}-\frac{3\omega^2\rho^3\left(x^2+y^2\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}-$$
$$-\frac{2\omega^2\rho^4\left(x^2+y^2\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}+\frac{\omega^2\rho^4\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}-$$
$$-\frac{\omega^2\rho^5\left(x^2+y^2\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^3}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^4}-\frac{\omega^3\rho^2\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)}{c^3\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}-$$
$$-\frac{2\omega^3\rho^3\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^2}{c^3\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}-\frac{\omega^3\rho^4\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)\left(x\cos\phi+y\sin\phi\right)^3}{c^3\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{5/2}}. \tag{26}$$

В (25) лишь величина D согласно (26) зависит от угла ϕ. После интегрирования по этому углу в (25) остаётся следующее:

$$\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\int_0^{\rho_d}\frac{\left[\begin{array}{l}1+\dfrac{\omega^2\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}+\dfrac{3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}-\\ -\dfrac{15\omega^2\rho^4\left(x^2+y^2\right)^2}{16c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}+\dfrac{3\rho^4\left(x^2+y^2\right)^2}{32\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^4}\end{array}\right]\gamma'\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}.$$

Два последних члена в квадратной скобке внутри интеграла, ввиду их малости, можно далее не учитывать. Фактор Лоренца γ' аналогично (5) в первом приближении записывается так:

$$\gamma'=\frac{c\gamma_c}{r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\approx\gamma_c-\frac{2\pi\eta\rho_0 r^2\gamma_c}{3c^2}=\gamma_c-\frac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)\gamma_c}{3c^2}, \tag{27}$$

Заметим, что здесь мы используем фактор Лоренца γ_c в центре вращающейся сферы, который может быть и не равен γ'_c в (5) в центре покоящейся сферы. С учётом γ' из (27) для φ_d можно записать:

$$\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}\gamma_c}{2\varepsilon_0}\int_0^{\rho_d}\frac{\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)}{3c^2}+\\ +\dfrac{\omega^2\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}+\dfrac{3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}\end{array}\right]\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}.$$

Представим потенциал в виде суммы из четырёх членов, получающихся при интегрировании потенциала φ_d по переменной ρ:

$$\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}\gamma_c}{2\varepsilon_0}\left(I_1+I_2+I_3+I_4\right),$$

где

$$I_1=\int_0^{\rho_d}\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}, \qquad I_2=-\frac{2\pi\eta\rho_0}{3c^2}\int_0^{\rho_d}\frac{\left(\rho^2+z_d^2\right)\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}},$$

$$I_3=\frac{\omega^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^2}\int_0^{\rho_d}\frac{\rho^3\, d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}, \qquad I_4=\frac{3\left(x^2+y^2\right)}{4}\int_0^{\rho_d}\frac{\rho^3\, d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{5/2}}.$$

Данные интегралы с учётом соотношения $\rho_d^2=a^2-z_d^2$ равны:

$$I_1=\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}-\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}.$$

$$I_2=-\frac{2\pi\eta\rho_0}{3c^2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(R^2+a^2-2zz_d\right)^{3/2}}{3}-\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}+\\+\dfrac{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^{3/2}}{3}\end{array}\right]-$$

$$-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\left(\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}-\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}\right).$$

$$I_3=\frac{\omega^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^2}\left[\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}+\frac{R^2+z_d^2-2zz_d}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}}-2\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}\right].$$

$$I_4=-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{4}\left[\frac{a^2-z_d^2}{\left(R^2+a^2-2zz_d\right)^{3/2}}+\frac{2}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}}-\frac{2}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}}\right].$$

(28)

Потенциал φ_d представляет собой потенциал в удалённой точке P от одного тонкого слоя в виде диска, расположенного параллельно плоскости XOY и сдвинутого вдоль оси OZ на расстояние z_d. Теперь необходимо просуммировать отдельные потенциалы, создаваемые в точке P всеми слоями шара, учитывая, что толщина слоя s представляет собой дифференциал dz_d. Переходя от суммы к интегралу, находим:

$$\varphi\approx\frac{\rho_{0q}\gamma_c}{2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\left(I_1+I_2+I_3+I_4\right)dz_d\,.$$

Используя (28), имеем:

$$\int_{-a}^{a}I_1\,dz_d\approx\frac{2a^3}{3R},\qquad\qquad \int_{-a}^{a}I_2\,dz_d\approx-\frac{4\pi\eta\rho_0 a^5}{15c^2R},$$

$$\int_{-a}^{a}I_3\,dz_d\approx\frac{\omega^2a^5\left(x^2+y^2\right)}{15c^2R^3},\qquad\qquad \int_{-a}^{a}I_4\,dz_d\approx\frac{a^5\left(x^2+y^2\right)}{5R^5}.$$

С учётом этого для потенциала получается следующее:

$$\varphi \approx \frac{\rho_{0q} a^3 \gamma_c}{3\varepsilon_0 R}\left[1-\frac{2\pi\eta\rho_0 a^2}{5c^2}+\frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{10R^4}+\frac{\omega^2 a^2\left(x^2+y^2\right)}{10c^2R^2}\right]. \qquad (29)$$

Выражение (29) для потенциала является приблизительным решением в средней зоне, где выполняются условия $R >> a$, $\frac{\omega \hat{R}_P}{c} \approx \frac{\omega R_P}{c} \approx \frac{\omega R}{c} << 1$.

Вычислим теперь заряд медленно вращающейся сферы в сферических координатах r, θ, ϕ. Усреднённый фактор Лоренца движения частиц согласно (9) получается $\overline{\gamma} = \gamma' \gamma_r$, плотность заряда внутри сферы будет $\gamma' \gamma_r \rho_{0q}$, а элемент движущегося вследствие вращения объёма равен $dV_s = \frac{r^2 dr d\phi \sin\theta d\theta}{\gamma_r}$. Отсюда для заряда с учётом (27) путём интегрирования по объёму сферы в сферических координатах находим:

$$q_\omega = \rho_{0q}\int \gamma' \gamma_r dV_s = \frac{c\rho_{0q}\gamma_c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\int \sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) r dr d\phi \sin\theta d\theta . \qquad (30)$$

Результат интегрирования следующий:

$$\begin{aligned} q_\omega &= \frac{\rho_{0q}c^2\gamma_c}{\eta\rho_0}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-a\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]\approx \\ &\approx \frac{4\pi\rho_{0q}a^3\gamma_c}{3}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 a^2}{5c^2}\right). \end{aligned} \qquad (31)$$

Заряд q_ω согласно способу его вычисления в (31) есть сумма инвариантных зарядов всех частиц системы и следовательно, является инвариантной величиной, не зависящей от угловой скорости вращения ω. В таком случае заряд q_ω (31) должен равняться заряду q_b в (8). Отсюда находим равенство факторов Лоренца в центре сферы для случаев покоящейся сферы и аналогичной вращающейся сферы: $\gamma_c = \gamma'_c$.

Из (29) и (31) следует:

$$\varphi \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[1+\frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{10R^4}+\frac{\omega^2 a^2\left(x^2+y^2\right)}{10c^2R^2}\right]. \tag{32}$$

С целью проверки решения (32) для потенциала можно подставить его в (10) в уравнение $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$. Как следствие получается, что в (32) сумма двух членов $\frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{10R^4}+\frac{\omega^2 a^2\left(x^2+y^2\right)}{10c^2R^2}$ не согласуется с данным уравнением. Это возможно, поскольку при интегрировании мы пренебрегали всеми возможными малыми членами, присутствие которых могло бы привести к удовлетворению уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В связи с этим напомним, что в (17) мы раскладывали синус и косинус лишь до членов первого порядка в виде $\sin\left(\omega\hat{R}_P / c\right)\approx \omega\hat{R}_P / c$, $\cos\left(\omega\hat{R}_P / c\right)\approx 1$, получая (19). А в (32) угловая скорость ω присутствует в члене второго порядка, содержащем квадрат скорости света в знаменателе. Этот член может измениться, если в (17) разложить синус и косинус до членов второго порядка в виде $\sin\left(\frac{\omega\hat{R}_P}{c}\right)\approx\frac{\omega\hat{R}_P}{c}-\frac{\omega^3\hat{R}_P^3}{6c^3}$, $\cos\left(\frac{\omega\hat{R}_P}{c}\right)\approx 1-\frac{\omega^2\hat{R}_P^2}{2c^2}$. С другой стороны, наличие малого члена $\frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{10R^4}$ противоречит закону Кулона при $\omega = 0$, и само его появление может быть следствием принятой процедуры аппроксимации.

Чтобы выполнялось уравнение Лапласа, заменим сумму двух членов в (32) на $\frac{\omega^2 a^2}{10c^2}$. По крайней мере такая замена вполне законна при условиях $R \gg a$, $x^2+y^2 \gg z^2$, $x^2+y^2\approx R^2$. С учётом вышеизложенного потенциал приобретает следующий вид:

$$\varphi \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{\omega^2 a^2}{10c^2}\right). \tag{33}$$

Поскольку $\frac{\omega R}{c} \ll 1$, $a \ll R$, $\frac{\omega a}{c}\ll 1$, член в скобке в (33) даёт очень малую поправку к потенциалу φ. Если снова предположить, что соотношения размеров и скоростей в системе заданы относительной величиной порядка 1 %, то тогда $\frac{a}{R} < 0,01$, $\frac{\omega R}{c} < 0,01$ и $\frac{\omega a}{c} < 0,0001$. В этом случае вся скобка в (33) может дать поправку к потенциалу, не превышающую 0,0000001 %.

Нетрудно проверить, что потенциал (33) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. При этом для покоящейся сферы потенциал согласно (7) имеет вид $\varphi_o = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 R}$, причём $q_b = q_\omega$, $\gamma'_c = \gamma_c$, и выполняется уравнение $\Delta\varphi_o = 0$.

Из изложенного следует, что в общем случае потенциал за пределами вращающейся сферы можно представить формулой

$$\varphi = \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 R} F, \qquad (34)$$

где функция F может быть функцией от ω, a, R, и от $x^2 + y^2$. При $\omega = 0$ должно быть $F = 1$, а при вращении сферы с заряженными частицами для средней зоны, где выполняются условия $R >> a$, $\frac{\omega R}{c} << 1$, $x^2 + y^2 \approx R^2$, должно быть $F \approx 1 + \frac{\omega^2 a^2}{10c^2}$, если считать (33) справедливым. Таким образом, функция F мало отличается от 1.

Из выражения (32) следует, что в средней зоне потенциал в принципе может зависеть от направления на точку наблюдения и при том же расстоянии R увеличивается по мере приближения к экваториальной плоскости. Это могло бы быть следствием сферически-цилиндрической симметрии расположения движущихся зарядов при вычислении потенциала. Действительно, потенциал φ_d от одного диска внутри сферы согласно (16) зависит от запаздывающего угла $\hat{\phi} = \omega\hat{t} + \phi_0 = \omega t + \phi_0 - \frac{\omega \hat{R}_P}{c} = \phi - \frac{\omega \hat{R}_P}{c}$, являющегося функцией угловой скорости ω. Отсюда следует зависимость от ω потенциала φ за пределами сферы, которая может реализоваться в виде (32-34).

2.3. Векторный потенциал в средней зоне

Действуя аналогично тому, как из (16) получилось (25), преобразуем компоненты векторного потенциала вращающегося диска (18):

$$A_{dx} = -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{D\gamma' \sin\hat{\phi}\, \rho^2 \, d\rho \, d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} \, ,$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{D\gamma' \cos\hat{\phi}\, \rho^2 \, d\rho \, d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} \, , \qquad\qquad A_{dz} = 0 \, . \qquad (35)$$

Подстановка $\hat{R}_p$ из (23) в (19) даёт следующее:

$$\cos\hat{\phi} \approx \cos\phi + \frac{\omega}{c}\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}\,\sin\phi - \frac{\omega^2 \rho\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)\sin\phi}{c^2} -$$
$$-\frac{\omega\rho\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)\sin\phi}{c\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} + \frac{\omega^3\rho^2\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2\sin\phi}{2c^3\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} -$$
$$-\frac{\omega\rho^2\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)^2\sin\phi}{2c\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} + \frac{\omega^3\rho^3\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)\sin\phi}{2c^3\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} .$$

$$\sin\hat{\phi} \approx \sin\phi - \frac{\omega}{c}\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}\,\cos\phi + \frac{\omega^2 \rho\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)\cos\phi}{c^2} +$$
$$+\frac{\omega\rho\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)\cos\phi}{c\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} - \frac{\omega^3\rho^2\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2\cos\phi}{2c^3\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} +$$
$$+\frac{\omega\rho^2\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)^2\cos\phi}{2c\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} - \frac{\omega^3\rho^3\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2\left(x\cos\phi + y\sin\phi\right)\cos\phi}{2c^3\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} .$$

(36)

Используем D из (26), а также $\cos\hat{\phi}$ и $\sin\hat{\phi}$ из (36), и проинтегрируем произведения этих величин по углу ϕ:

$$\int_0^{2\pi} D\sin\hat{\phi}\, d\phi \approx \frac{\rho y\pi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2} + \frac{3\rho^3 y\left(x^2 + y^2\right)\pi}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^3} + \frac{3\omega\rho^3 x\left(x^2 + y^2\right)\pi}{4c\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{5/2}} -$$
$$-\frac{15\omega^2\rho^3 y\left(x^2 + y^2\right)\pi}{8c^2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2} - \frac{\omega^3\rho x\pi}{c^3}\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2} + \frac{7\omega^3\rho^3 x\left(x^2 + y^2\right)\pi}{4c^3\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} .$$

$$\int_0^{2\pi} D\cos\hat{\phi}\,d\phi \approx \frac{\rho x\pi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}+\frac{3\rho^3 x\left(x^2+y^2\right)\pi}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}-\frac{3\omega\rho^3 y\left(x^2+y^2\right)\pi}{4c\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{5/2}}-$$

$$-\frac{15\omega^2\rho^3 x\left(x^2+y^2\right)\pi}{8c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}+\frac{\omega^3\rho y\pi}{c^3}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}-\frac{7\omega^3\rho^3 y\left(x^2+y^2\right)\pi}{4c^3\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}.$$

(37)

Из (35) и (37) следует:

$$A_{dx} \approx -\frac{\mu_0\omega s\rho_{0q}x}{4}\int_0^{\rho_d}\left[\frac{3\omega\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}-\frac{\omega^3}{c^3}+\frac{7\omega^3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^3\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}\right]\gamma'\rho^3 d\rho-$$

$$-\frac{\mu_0\omega s\rho_{0q}y}{4}\int_0^{\rho_d}\left[1+\frac{3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}-\frac{15\omega^2\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{8c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}\right]\frac{\gamma'\rho^3 d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}.$$

$$A_{dy} \approx -\frac{\mu_0\omega s\rho_{0q}y}{4}\int_0^{\rho_d}\left[\frac{3\omega\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}-\frac{\omega^3}{c^3}+\frac{7\omega^3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^3\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}\right]\gamma'\rho^3 d\rho+$$

$$+\frac{\mu_0\omega s\rho_{0q}x}{4}\int_0^{\rho_d}\left[1+\frac{3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}-\frac{15\omega^2\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{8c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}\right]\frac{\gamma'\rho^3 d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}.$$

(38)

Подставим в (38) фактор Лоренца γ' из (27). Рассмотрим далее следующие интегралы:

$$I_5 \approx \gamma_c\int_0^{\rho_d}\left[1-\frac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)}{3c^2}\right]\left[\begin{array}{l}\dfrac{3\omega\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^3}-\dfrac{\omega^3}{c^3}+\\ +\dfrac{7\omega^3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^3\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}\end{array}\right]\rho^3 d\rho\,.$$

$$I_6 \approx \gamma_c \int_0^{\rho_d} \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2 + z_d^2\right)}{3c^2} + \\ + \dfrac{3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2} - \dfrac{15\omega^2\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{8c^2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)} \end{array} \right] \frac{\rho^3 \, d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} . \tag{39}$$

С помощью (39) выражения (38) записываются так:

$$A_{dx} \approx -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} x}{4} I_5 - \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} y}{4} I_6 , \qquad A_{dy} \approx -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} y}{4} I_5 + \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} x}{4} I_6 . \tag{40}$$

После интегрирования интегралов (39) по переменной ρ с учётом соотношения $\rho_d = \sqrt{a^2 - z_d^2}$ получается:

$$I_5 \approx \gamma_c \left(1 - \frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2} \right) D_1 - \frac{2\pi\eta\rho_0\gamma_c}{3c^2} D_2 ,$$

где

$$D_1 = \int_0^{\rho_d} \left[\frac{3\omega\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^3} - \frac{\omega^3}{c^3} + \frac{7\omega^3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^3\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2} \right] \rho^3 d\rho .$$

$$D_2 = \int_0^{\rho_d} \left[\frac{3\omega\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^3} - \frac{\omega^3}{c^3} + \frac{7\omega^3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^3\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2} \right] \rho^5 d\rho .$$

При этом

$$D_1 \approx \frac{3\omega\left(x^2+y^2\right)}{4c\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^3} \left[\frac{\left(a^2 - z_d^2\right)^3}{6} - \frac{3\left(a^2 - z_d^2\right)^4}{8\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)} + \frac{3\left(a^2 - z_d^2\right)^5}{5\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^2} \right] -$$

$$- \frac{\omega^3}{c^3} \frac{\left(a^2 - z_d^2\right)^2}{4} + \frac{7\omega^3\left(x^2+y^2\right)}{4c^3\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^2} \left[\frac{\left(a^2 - z_d^2\right)^3}{6} - \frac{\left(a^2 - z_d^2\right)^4}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)} + \frac{3\left(a^2 - z_d^2\right)^5}{10\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^2} \right].$$

$$D_2 \approx \frac{3\omega\left(x^2+y^2\right)}{4c\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^3}\left[\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^4}{8}-\frac{3\left(a^2-z_d^2\right)^5}{10\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)}+\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^6}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^2}\right]-$$

$$-\frac{\omega^3}{c^3}\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^3}{4}+\frac{7\omega^3\left(x^2+y^2\right)}{4c^3\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^2}\left[\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^4}{8}-\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^5}{5\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)}+\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^6}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^2}\right]. \tag{41}$$

Кроме этого, имеем

$$I_6 = D_3 + D_4 + D_5 + D_6,$$

где

$$D_3 = \left(\gamma_c - \frac{2\pi\eta\,\rho_0\,z_d^2\gamma_c}{3c^2}\right)\int_0^{\rho_d}\frac{\rho^3\,d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \left(\gamma_c - \frac{2\pi\eta\,\rho_0\,z_d^2\gamma_c}{3c^2}\right)\left(\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}+\frac{R^2+z_d^2-2zz_d}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}}-2\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}\right).$$

$$D_4 = -\frac{2\pi\eta\,\rho_0\gamma_c}{3c^2}\int_0^{\rho_d}\frac{\rho^5\,d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{2\pi\eta\,\rho_0\gamma_c}{3c^2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\left(R^2+a^2-2zz_d\right)^{3/2}}{3}+\dfrac{8\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^{3/2}}{3}- \\ -2\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}-\dfrac{\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^2}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}}\end{array}\right].$$

$$D_5 = \frac{3\left(x^2+y^2\right)\gamma_c}{4}\int_0^{\rho_d}\frac{\rho^5\,d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{7/2}} =$$

$$= \frac{3\left(x^2+y^2\right)\gamma_c}{4}\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}}+\dfrac{8}{15\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}}+\dfrac{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)}{3\left(R^2+a^2-2zz_d\right)^{3/2}}- \\ -\dfrac{\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^2}{5\left(R^2+a^2-2zz_d\right)^{5/2}}\end{array}\right].$$

$$D_6 = -\frac{15\omega^2\left(x^2+y^2\right)\gamma_c}{8c^2}\int_0^{\rho_d}\frac{\rho^5\,d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{5/2}} =$$

$$= -\frac{15\omega^2\left(x^2+y^2\right)\gamma_c}{8c^2}\left[\begin{array}{l}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}+\dfrac{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d}}- \\ -\dfrac{8\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}}{3}-\dfrac{\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^2}{3\left(R^2+a^2-2zz_d\right)^{3/2}}\end{array}\right]. \qquad (42)$$

Заменяя в (40) s на дифференциал dz_d и интегрируя по всем дискам внутри сферы в пределах от $-a$ до a, приходим к компонентам A_x и A_y векторного потенциала от сферы в целом:

$$A_x \approx -\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}x}{4}\int_{-a}^{a} I_5\,dz_d - \frac{\mu_0\omega\rho_{0q}y}{4}\int_{-a}^{a} I_6\,dz_d\ .$$

$$A_y \approx -\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}y}{4}\int_{-a}^{a} I_5\,dz_d + \frac{\mu_0\omega\rho_{0q}x}{4}\int_{-a}^{a} I_6\,dz_d\ .$$

Учтём здесь, что интегралы I_5 и I_6 в (39) вычислены через величины D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 и D_6 из (41-42):

$$A_x \approx -\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}x\gamma_c}{4}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)D_1\,dz_d + \frac{\pi\mu_0\eta\rho_0\omega\rho_{0q}x\gamma_c}{6c^2}\int_{-a}^{a} D_2\,dz_d -$$

$$-\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}y}{4}\int_{-a}^{a}\left(D_3+D_4+D_5+D_6\right)dz_d.$$

$$A_y \approx -\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}y\gamma_c}{4}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)D_1\,dz_d + \frac{\pi\mu_0\eta\rho_0\omega\rho_{0q}y\gamma_c}{6c^2}\int_{-a}^{a} D_2\,dz_d +$$

$$+\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}x}{4}\int_{-a}^{a}\left(D_3+D_4+D_5+D_6\right)dz_d. \qquad (43)$$

Интегралы от величин $\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)D_1$, D_2, D_3, D_4, D_5 и D_6 по переменной z_d слабо зависят от z и в первом приближении равны:

$$\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)D_1\,dz_d \approx$$
$$\approx \frac{4\omega a^7\left(x^2+y^2\right)}{35cR^6}-\frac{4\omega^3 a^5}{15c^3}+\frac{4\omega^3 a^7\left(x^2+y^2\right)}{15c^3R^4}-\frac{8\pi\eta\omega\rho_0 a^9\left(x^2+y^2\right)}{945c^3R^6}.$$

$$\int_{-a}^{a} D_2\,dz_d \approx \frac{8\omega a^9\left(x^2+y^2\right)}{105cR^6}-\frac{8\omega^3 a^7}{35c^3}+\frac{8\omega^3 a^9\left(x^2+y^2\right)}{45c^3R^4}.$$

$$\int_{-a}^{a} D_3\,dz_d \approx \frac{4a^5\gamma_c}{15R^3}-\frac{8\pi\eta\rho_0 a^7\gamma_c}{315c^2R^3}, \qquad \int_{-a}^{a} D_4\,dz_d \approx -\frac{32\pi\eta\rho_0 a^7\gamma_c}{315c^2R^3}.$$

$$\int_{-a}^{a} D_5\,dz_d \approx \frac{4a^7\left(x^2+y^2\right)\gamma_c}{35R^7}, \qquad \int_{-a}^{a} D_6\,dz_d \approx -\frac{2\omega^2 a^7\left(x^2+y^2\right)\gamma_c}{7c^2R^5}.$$

Подставляя данные интегралы в (43), находим:

$$A_x \approx -\frac{\mu_0\omega^2\rho_{0q}a^3x\gamma_c}{5c}\left[\frac{a^4\left(x^2+y^2\right)}{7R^6}-\frac{\omega^2a^2}{3c^2}+\frac{\omega^2a^4\left(x^2+y^2\right)}{3c^2R^4}-\frac{2\pi\eta\rho_0a^6\left(x^2+y^2\right)}{27c^2R^6}\right]-$$
$$-\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5y\gamma_c}{15R^3}\left[1-\frac{10\pi\eta\rho_0a^2}{21c^2}+\frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{7R^4}-\frac{15\omega^2a^2\left(x^2+y^2\right)}{14c^2R^2}\right].$$

$$A_y \approx -\frac{\mu_0\omega^2\rho_{0q}a^3y\gamma_c}{5c}\left[\frac{a^4\left(x^2+y^2\right)}{7R^6}-\frac{\omega^2a^2}{3c^2}+\frac{\omega^2a^4\left(x^2+y^2\right)}{3c^2R^4}-\frac{2\pi\eta\rho_0a^6\left(x^2+y^2\right)}{27c^2R^6}\right]+$$
$$+\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5x\gamma_c}{15R^3}\left[1-\frac{10\pi\eta\rho_0a^2}{21c^2}+\frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{7R^4}-\frac{15\omega^2a^2\left(x^2+y^2\right)}{14c^2R^2}\right].$$

(44)

Ввиду приблизительности наших вычислений, следует уточнить все члены в (44) путём подстановки компонент A_x и A_y векторного потенциала в уравнение Лапласа (10), имеющее вид $\Delta \mathbf{A} = 0$. Чтобы данное уравнение удовлетворялось, необходимо сделать упрощение в (44), исключив малые члены и полагая $\frac{x^2+y^2}{R^2} \approx 1$. Ранее мы использовали аналогичный подход, чтобы от (32) перейти к выражению (33) для потенциала. Это даёт следующее выражение, справедливое при небольших z:

$$A_x \approx \frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15c^3} - \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15R^3} \left(1 - \frac{10\pi \eta \rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{15\omega^2 a^2}{14c^2}\right).$$

$$A_y \approx \frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15c^3} + \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15R^3} \left(1 - \frac{10\pi \eta \rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{15\omega^2 a^2}{14c^2}\right). \qquad (45)$$

Так как в (35) $A_{dz} = 0$ для каждого вращающегося диска внутри сферы, то и компонента A_z векторного потенциала от всей вращающейся сферы с заряженными частицами тоже равна нулю.

2.4. Электрическое и магнитное поля в средней зоне

Напряжённость электрического поля $\mathbf{E}$ и индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ определяются стандартными формулами:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \qquad (46)$$

Поскольку сфера вращается с постоянной угловой скоростью ω, компоненты векторного потенциала в (45) не зависят от времени, и тогда поле $\mathbf{E}$ определяется лишь градиентом скалярного потенциала φ. Подставим (33) и (45) в (46), и найдём поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, учитывая, что $A_z = 0$:

$$\mathbf{E} \approx \frac{q_\omega \mathbf{R}}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{10c^2}\right).$$

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\approx\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5xz\gamma_c}{5R^5}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0a^2}{21c^2}-\frac{15\omega^2a^2}{14c^2}\right).$$

$$B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\approx\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5yz\gamma_c}{5R^5}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0a^2}{21c^2}-\frac{15\omega^2a^2}{14c^2}\right).$$

$$B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\approx\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5\gamma_c\left(2R^2-3x^2-3y^2\right)}{15R^5}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0a^2}{21c^2}-\frac{15\omega^2a^2}{14c^2}\right).$$

(47)

Так как мы упростили (44) и использовали для векторного потенциала (45), в (47) присутствует лишь дипольная составляющая магнитного поля.

Для электрического и магнитного полей в специальной теории относительности справедливы волновые уравнения [15]:

$$\partial_\beta\partial^\beta\mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{E}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla(\gamma\rho_{0q})-\mu_0\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t},\qquad \partial_\beta\partial^\beta\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{B}=\mu_0\nabla\times\mathbf{j}.$$

Так как за пределами вращающейся заряженной сферы нет ни зарядов ни токов, правая часть волновых уравнений обнуляется. Кроме этого, при постоянной скорости вращения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не зависят от времени. В результате волновые уравнения для полей превращаются в уравнения Лапласа:

$$\Delta\mathbf{E}=0,\qquad\qquad \Delta\mathbf{B}=0. \tag{48}$$

Непосредственной подстановкой в (48) компонент электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$ из (47) можно убедиться в том, что поля в средней зоне удовлетворяют уравнению Лапласа.

2.5. Скалярный потенциал в дальней зоне

Условием дальней зоны можно считать условия $R>>a$, $\frac{\omega\hat{R}_P}{c}\approx 1$. Поскольку $\hat{\phi}=\phi-\frac{\omega\hat{R}_P}{c}$, в этом случае можно записать:

$$\cos\hat{\phi} = \cos\left(\phi - \phi_P\right), \qquad \sin\hat{\phi} = \sin\left(\phi - \phi_P\right), \tag{49}$$

где с учётом (13) угол $\phi_P = \frac{\omega \hat{R}_P}{c} = \frac{\omega}{c}\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\hat{\phi} - 2\rho y\sin\hat{\phi}} \approx \frac{\omega R}{c}$

.

Подстановка (49) в (16) даёт:

$$\varphi_d = \frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{\gamma'\rho\, d\rho\, d\phi}{\hat{R}_P + \frac{\omega\rho x\sin\left(\phi-\phi_P\right)}{c} - \frac{\omega\rho y\cos\left(\phi-\phi_P\right)}{c}}. \tag{50}$$

где $\hat{R}_P = \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\left(\phi-\phi_P\right) - 2\rho y\sin\left(\phi-\phi_P\right)}$.

Учтём следующие преобразования для выражения под знаком интеграла:

$$H = \frac{1}{\hat{R}_P + \frac{\omega\rho x\sin\left(\phi-\phi_P\right)}{c} - \frac{\omega\rho y\cos\left(\phi-\phi_P\right)}{c}} =$$

$$= \frac{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{-1/2}}{\sqrt{1 - \frac{2\rho\left[x\cos\left(\phi-\phi_P\right) + y\sin\left(\phi-\phi_P\right)\right]}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} + \frac{\omega\rho\left[x\sin\left(\phi-\phi_P\right) - y\cos\left(\phi-\phi_P\right)\right]}{c\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}}}.$$

В данном выражении используем правило разложения квадратного корня в виде $\sqrt{1-\delta} \approx 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8}$, и приблизительное выражение $\frac{1}{1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} + \gamma} \approx 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{3\delta^2}{8} - \gamma - \gamma\delta\left(1+\delta\right) + \gamma^2$:

$$H \approx \frac{\left(\begin{aligned}&1+\frac{\rho\left[x\cos\left(\phi-\phi_P\right)+y\sin\left(\phi-\phi_P\right)\right]}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}+\frac{3\rho^2\left[x\cos\left(\phi-\phi_P\right)+y\sin\left(\phi-\phi_P\right)\right]^2}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}-\\&-\frac{\omega\rho\left[x\sin\left(\phi-\phi_P\right)-y\cos\left(\phi-\phi_P\right)\right]}{c\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}+\frac{\omega^2\rho^2\left[x\sin\left(\phi-\phi_P\right)-y\cos\left(\phi-\phi_P\right)\right]^2}{c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}-\\&-\frac{2\omega\rho^2\left[x\sin\left(\phi-\phi_P\right)-y\cos\left(\phi-\phi_P\right)\right]\left[x\cos\left(\phi-\phi_P\right)+y\sin\left(\phi-\phi_P\right)\right]}{c\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}\end{aligned}\right)}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}. \tag{51}$$

С учётом (51) для потенциала (50) можно записать:

$$\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d} H\gamma'\rho\, d\rho\, d\phi. \tag{52}$$

По мере роста расстояния R угол $\phi_P = \frac{\omega\hat{R}_P}{c} \approx \frac{\omega R}{c}$ может вначале достигнуть величины $\frac{\pi}{2}$, затем π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, и т.д. В общем случае угол ϕ_P будет проходить значения $\frac{k\pi}{2}$, где $k = 1, 2, 3...$

Проинтегрируем величину H в (52) по углу ϕ, считая угол ϕ_P постоянным и почти не зависящим от ϕ. Учитывая, что интегралы от $\cos\left(\phi-\phi_P\right)$, $\sin\left(\phi-\phi_P\right)$ и $\sin\left(\phi-\phi_P\right)\cos\left(\phi-\phi_P\right)$ в пределах от 0 до 2π равны нулю, находим:

$$\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\int_0^{\rho_d}\frac{\left[1+\frac{\omega^2\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{2c^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}+\frac{3\rho^2\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}\right]\gamma'\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}. \tag{53}$$

Если подставить в (53) выражение γ' из (27), то видно, что потенциал можно представить в виде $\varphi_d \approx \frac{s\rho_{0q}\gamma_c}{2\varepsilon_0}\left(I_1 + I_2 + 2I_3 + I_4\right)$, где интегралы I_1, I_2, I_3 и I_4 были найдены в (28).

Сумма потенциалов φ_d от всех слоёв сферы даёт искомый потенциал сферы. Полагая $s = dz_d$ и заменяя сумму потенциалов слоёв интегралом по переменной z_d, для потенциала сферы можно записать:

$$\begin{aligned}
&\varphi \approx \frac{\rho_{0q}\gamma_c}{2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\left(I_1 + I_2 + 2I_3 + 2I_4\right)dz_d \approx \\
&\approx \frac{\rho_{0q}a^3\gamma_c}{3\varepsilon_0 R}\left[1 - \frac{2\pi\eta\rho_0 a^2}{5c^2} + \frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{10R^4} + \frac{\omega^2 a^2\left(x^2+y^2\right)}{5c^2R^2}\right].
\end{aligned} \tag{54}$$

Скалярный потенциал (54) в дальней зоне отличается от потенциала (29) в средней зоне тем, что в (54) последний член в квадратной скобке получился в два раза больше.

В (54) можно подставить (31) и выразить потенциал через заряд q_ω. С целью соответствия потенциала уравнению Лапласа в (54) исключим малый член $\frac{3a^2\left(x^2+y^2\right)}{10R^4}$ и положим $x^2 + y^2 \approx R^2$, что справедливо при небольших z. В результате получается следующее:

$$\varphi \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 + \frac{\omega^2 a^2}{5c^2}\right). \tag{55}$$

Небольшое по величине отличие потенциалов в (55) и в (33) мы связываем с тем, что решения для этих потенциалов были получены двумя различными способами и с разной степенью приближения.

2.6. Векторный потенциал в дальней зоне

Преобразуем (18) с помощью (51) так же, как был преобразован потенциал (50), и учтём ещё (49). Тогда для компонент векторного потенциала вращающегося диска находим:

$$A_{dx} \approx -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} H \gamma' \sin\left(\phi - \phi_P\right) \rho^2 d\rho d\phi .$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} H \gamma' \cos\left(\phi - \phi_P\right) \rho^2 d\rho d\phi .$$

При больших расстояниях можно пренебречь изменением угла $\phi_P = \frac{\omega \hat{R}_P}{c} \approx \frac{\omega R}{c}$ при интегрировании по углу ϕ и считать ϕ_P постоянной величиной. Это упрощает интегрирование компонент A_{dx} и A_{dy}. С учётом выражения H из (51) находим:

$$A_{dx} \approx \frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q} x}{4c} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \rho^3 d\rho}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2} - \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} y}{4} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \rho^3 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} .$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q} y}{4c} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \rho^3 d\rho}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2} + \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} x}{4} \int_0^{\rho_d} \frac{\gamma' \rho^3 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} . \tag{56}$$

Если в (56) подставить фактор Лоренца γ' из (27), появляются следующие интегралы:

$$I_7 = \gamma_c \int_0^{\rho_d} \left[1 - \frac{2\pi \eta \rho_0 \left(\rho^2 + z_d^2\right)}{3c^2}\right] \frac{\rho^3 d\rho}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2} .$$

$$I_8 = \gamma_c \int_0^{\rho_d} \left[1 - \frac{2\pi \eta \rho_0 \left(\rho^2 + z_d^2\right)}{3c^2}\right] \frac{\rho^3 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} .$$

С помощью интегралов I_7 и I_8 (56) запишется так:

$$A_{dx} \approx \frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q} x}{4c} I_7 - \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} y}{4} I_8, \qquad A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q} y}{4c} I_7 + \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q} x}{4} I_8 . \tag{57}$$

Вычислим интегралы I_7 и I_8 с учётом соотношения $\rho_d = \sqrt{a^2 - z_d^2}$, разлагая знаменатели в ряды по правилу $\frac{1}{1+\delta} \approx 1 - \delta + \delta^2$, где $\delta = \frac{\rho^2}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d}$:

$$I_7 \approx \frac{\left(a^2 - z_d^2\right)^2}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)}\left(\gamma_c - \frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2\gamma_c}{3c^2}\right)\left[1 - \frac{2\left(a^2 - z_d^2\right)}{3\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)} + \frac{\left(a^2 - z_d^2\right)^2}{2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^2}\right] -$$
$$- \frac{\pi\eta\rho_0\gamma_c\left(a^2 - z_d^2\right)^3}{9c^2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)}\left[1 - \frac{3\left(a^2 - z_d^2\right)}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)} + \frac{3\left(a^2 - z_d^2\right)^2}{5\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^2}\right].$$

$$I_8 = \left(\gamma_c - \frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2\gamma_c}{3c^2}\right)\left[\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d} + \frac{R^2 + z_d^2 - 2zz_d}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d}} - 2\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d}\right] -$$
$$- \frac{2\pi\eta\rho_0\gamma_c}{3c^2}\left[\begin{array}{l} \frac{\left(R^2 + a^2 - 2zz_d\right)^{3/2}}{3} - 2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d} - \\ - \frac{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^2}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d}} + \frac{8\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^{3/2}}{3} \end{array}\right]. \qquad (58)$$

Величины A_{dx} и A_{dy} есть компоненты векторного потенциала от одного тонкого диска. Для перехода к соответствующим компонентам потенциала от сферы в целом в (57) необходимо положить $s = dz_d$ и проинтегрировать по переменной z_d, задающей положение дисков внутри сферы на оси OZ:

$$A_x \approx \frac{\mu_0\omega^2\rho_{0q}x}{4c}\int_{-a}^{a} I_7\, dz_d - \frac{\mu_0\omega\rho_{0q}y}{4}\int_{-a}^{a} I_8\, dz_d,$$

$$A_y \approx \frac{\mu_0\omega^2\rho_{0q}y}{4c}\int_{-a}^{a} I_7\, dz_d + \frac{\mu_0\omega\rho_{0q}x}{4}\int_{-a}^{a} I_8\, dz_d. \qquad (59)$$

Подстановка (58) в (59) и последующее интегрирование по переменной z_d даёт следующее:

$$A_x \approx \frac{\mu_0 \omega^2 \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15cR^2}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right)-\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15R^3}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right).$$

$$A_y \approx \frac{\mu_0 \omega^2 \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15cR^2}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right)+\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15R^3}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right).$$

(60)

Здесь только последние члены, содержащие в знаменателе R^3, точно удовлетворяют уравнению Лапласа. Что касается первых членов, то в них можно учесть условие дальней зоны $\frac{\omega R}{c} \approx 1$. Это даёт выражения

$$A_x \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15R^3}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right)-\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15R^3}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right),$$

$$A_y \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15R^3}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right)+\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15R^3}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right),$$

удовлетворяющие уравнению Лапласа. Компонента $A_z = 0$, и потому A_z автоматически удовлетворяет уравнению Лапласа.

2.7. Электрическое и магнитное поля в дальней зоне

Для нахождения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ необходимо подставить (55) и (60) в (46):

$$\mathbf{E} \approx \frac{q_\omega \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(1+\frac{\omega^2 a^2}{5c^2}\right).$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z} \approx \frac{2\mu_0 \omega^2 \rho_{0q} a^5 yz \gamma_c}{15cR^4}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right)+\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 xz \gamma_c}{5R^5}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right).$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x} \approx -\frac{2\mu_0 \omega^2 \rho_{0q} a^5 xz \gamma_c}{15cR^4}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right)+\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 yz \gamma_c}{5R^5}\left(1-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}\right).$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 \gamma_c \left(2R^2 - 3x^2 - 3y^2\right)}{15R^5} \left(1 - \frac{10\pi \eta \rho_0 a^2}{21c^2}\right). \qquad (61)$$

Поля в (61) незначительно отличаются от полей (47) в средней зоне за счёт малых добавок, пропорциональных величине $\frac{\omega^2 a^2}{c^2}$. Данное различие можно считать следствием того, что при вычислениях применялись разные способы получения приблизительного решения. Кроме того, в первых членах в B_x и в B_y в (61) появляется вращательная компонента магнитного поля.

2.8. Скалярный потенциал в ближней зоне

В ближней зоне выполняются условия $R \geq a$, $\frac{\omega \hat{R}_P}{c} << 1$, так что точка P, где определяется потенциал, находится недалеко от сферы. Мы можем начать с выражения (21) для потенциала φ_d, создаваемого тонким слоем в виде диска внутри сферы, находящимся на оси OZ на высоте z_d. Для ближней зоны можно считать, что ранний момент времени $\hat{t} = t - \frac{\hat{R}_P}{c}$ приблизительно равен $\hat{t} \approx t - \frac{R_P}{c}$. При этом величина R_P в (11) мало отличается от $\hat{R}_P$ в (13), так как их различие связано с небольшим различием угла ϕ и угла $\hat{\phi} = \phi - \frac{\omega \hat{R}_P}{c}$. Поэтому величину $\hat{R}_P$ в знаменателе (21) можно заменить на R_P.

Величина R_P есть расстояние от точки интегрирования внутри сферы до точки наблюдения P. Далее будем считать, что точка P находится за пределами сферы и выполняется условие $R_P >> \frac{\omega \rho \left(x \sin\phi - y \cos\phi\right)}{c}$. Это позволяет разложить корень в (21) так, чтобы выделить малый член, содержащий квадрат скорости света:

$$\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi + \frac{\omega^2 \rho^2 \left(x \sin\phi - y \cos\phi\right)^2}{c^2}} \approx$$

$$\approx R_P + \frac{\omega^2 \rho^2 \left(x \sin\phi - y \cos\phi\right)^2}{2c^2 R_P}.$$

Здесь величина R_P представляет собой квадратный корень и соответствует (11):

$$R_P = \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi}\,. \qquad (62)$$

Теперь знаменатель в (21) можно преобразовать по правилу $\dfrac{1}{R_P+\delta} \approx \dfrac{1}{R_P}\left(1-\dfrac{\delta}{R_P}\right)$.

Потенциал φ_d создаётся одним слоем в виде тонкого диска радиуса $\rho_d = \sqrt{a^2 - z_d^2}$. Полный потенциал сферы есть сумма потенциалов по всем слоям, и эту сумму с учётом равенства $s = d\,z_d$ можно заменить интегралом:

$$\varphi \approx \frac{\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{0}^{\rho_d}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[1-\frac{\omega^2\rho^2\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2}{2c^2R_P^2}+\frac{\omega^2\rho x}{c^2}\cos\phi+\frac{\omega^2\rho y}{c^2}\sin\phi\right]\frac{\gamma'\rho\,d\rho\,d\phi\,d\,z_d}{R_P}\,. \qquad (63)$$

В (63) от угла ϕ зависит квадратная скобка, а также R_P согласно (62). При интегрировании по углу нам понадобятся четыре интеграла:

$$I_9 = \int\limits_0^{2\pi}\frac{d\phi}{R_P} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi}}\,.$$

$$I_{10} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(x\sin\phi - y\cos\phi\right)^2}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi\right)^{3/2}}\,d\phi\,.$$

$$I_{11} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi}}\,d\phi\,.$$

$$I_{12} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi}}\,d\phi\,. \qquad (64)$$

Делая обозначения $x=\sqrt{x^2+y^2}\cos\psi$, $y=\sqrt{x^2+y^2}\sin\psi$, а затем используя замены $\phi-\psi=\pi+2\gamma$, $\cos(\phi-\psi)=-\cos 2\gamma=2\sin^2\gamma-1$, преобразуем интеграл I_9:

$$
\begin{aligned}
I_9 &= \frac{2}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}\int_{\frac{-\pi-\psi}{2}}^{\frac{\pi-\psi}{2}}\frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}}= \\
&= \frac{4}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Здесь $k^2=\dfrac{4\rho\sqrt{x^2+y^2}}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}$, $F\left(k,\dfrac{\pi}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}}$ есть полный нормальный эллиптический интеграл первого рода.

Аналогичным способом можно выразить интеграл I_{10}:

$$
\begin{aligned}
I_{10} &= -\left.\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sin(\phi-\psi)}{\rho\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2-2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos(\phi-\psi)}}\right|_{\phi=0}^{2\pi}- \\
&-\frac{1}{\rho^2}\int_{\frac{-\pi-\psi}{2}}^{\frac{\pi-\psi}{2}}\frac{\left[2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos 2\gamma+\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)-\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)\right]d\gamma}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos 2\gamma}}.
\end{aligned}
$$

Первый член правой части при подстановке пределов интегрирования $\phi=0$ и $\phi=2\pi$ обращается в нуль. С учётом соотношения $\cos 2\gamma=1-2\sin^2\gamma$ имеем:

$$
\begin{aligned}
I_{10} &= -\frac{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}{\rho^2}\int_{\frac{-\pi-\psi}{2}}^{\frac{\pi-\psi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}\,d\gamma+ \\
&+\frac{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}{\rho^2\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}\int_{\frac{-\pi-\psi}{2}}^{\frac{\pi-\psi}{2}}\frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}}= \\
&= -\frac{2\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}\,E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{\rho^2}+\frac{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{\rho^2\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}.
\end{aligned}
$$

(66)

Здесь $E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}\,d\gamma$ есть полный нормальный эллиптический интеграл второго рода. Преобразование интеграла I_{11} даёт:

$$I_{11}=-\frac{\sin\psi\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\phi-\psi-\pi\right)}}{\rho\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{\phi=0}^{2\pi}-$$
$$-\frac{\cos\psi}{\rho\sqrt{x^2+y^2}}\int\limits_{\frac{-\pi-\psi}{2}}^{\frac{\pi-\psi}{2}}\frac{\left[2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos2\gamma+\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)-\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)\right]d\gamma}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\cos2\gamma}}.$$

Первый член правой части равен нулю, как и в случае с интегралом I_{10}. Второй член правой части с учётом соотношений $x=\sqrt{x^2+y^2}\cos\psi$, $y=\sqrt{x^2+y^2}\sin\psi$ преобразуется так, что I_{11} выражается через эллиптические интегралы:

$$I_{11}=-\frac{2x\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}{\rho\left(x^2+y^2\right)}E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{2x\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}{\rho\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right). \qquad (67)$$

Аналогично I_{11}, для I_{12} получается следующее:

$$I_{12}=-\frac{2y\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}{\rho\left(x^2+y^2\right)}E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+\frac{2y\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)}{\rho\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right). \qquad (68)$$

Учитывая (64), а также (27) для γ', (63) запишется так:

$$\varphi \approx \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\rho_d}\left\{\begin{aligned}&\left[1-\frac{2\pi\eta\,\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)}{3c^2}\right]I_9-\frac{\omega^2\rho^2}{2c^2}I_{10}+\\&+\frac{\omega^2\rho x}{c^2}I_{11}+\frac{\omega^2\rho y}{c^2}I_{12}\end{aligned}\right\}\rho\,d\rho\,dz_d\ .$$

В данном выражении видно, что необходимо вычислить интегралы $\int_0^{\rho_d} I_9\,\rho\,d\rho$, $\int_0^{\rho_d} I_9\,\rho^3\,d\rho$, $\int_0^{\rho_d} I_{10}\,\rho^3\,d\rho$, $\int_0^{\rho_d} I_{11}\,\rho^2\,d\rho$, $\int_0^{\rho_d} I_{12}\,\rho^2\,d\rho$. Для этого необходимо представить величины I_9, I_{10}, I_{11} и I_{12} так, чтобы в них переменная ρ появилась в явном виде. С этой целью разложим эллиптические интегралы $E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$ и $F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$ в (65-68) в ряды по стандартным формулам:

$$F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{9k^4}{64}...\right)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right)^2k^{2n}.$$

$$E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{k^2}{4}-\frac{3k^4}{64}...\right)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right)^2\frac{k^{2n}}{1-2n}. \qquad (69)$$

Если в (69) учесть первые два члена разложения $F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$ и подставить их в (65), а затем три члена каждого разложения подставить в (66-68), получится следующее:

$$I_9\approx\frac{2\pi}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}\left(1+\frac{\rho\sqrt{x^2+y^2}}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

$$I_{10}\approx\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)\left(2R^2+2z_d^2-4zz_d+2\rho^2-5\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5/2}}.$$

$$I_{11} \approx \frac{\pi \rho x \left(2R^2 + 2z_d^2 - 4zz_d + 2\rho^2 - 5\rho\sqrt{x^2+y^2} \right)}{2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2} \right)^{5/2}} .$$

$$I_{12} \approx \frac{\pi \rho y \left(2R^2 + 2z_d^2 - 4zz_d + 2\rho^2 - 5\rho\sqrt{x^2+y^2} \right)}{2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2} \right)^{5/2}} . \qquad (70)$$

В (70) величины I_{10}, I_{11} и I_{12} пропорциональны друг другу, так что подстановка их в выражение для потенциала приводит к сокращению членов:

$$\varphi \approx \frac{\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\rho_d}\left\{\left[1-\frac{2\pi\eta\,\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)}{3c^2}\right]I_9+\frac{\omega^2\rho^2}{2c^2}I_{10}\right\}\rho\,d\rho\,dz_d .$$

Учитывая (70) и соотношение $\rho_d = \sqrt{a^2 - z_d^2}$, вычислим интегралы $\int_0^{\rho_d} I_9\,\rho\,d\rho$, $\int_0^{\rho_d} I_9\,\rho^3\,d\rho$ и $\int_0^{\rho_d} I_{10}\,\rho^3\,d\rho$:

$$H_1 = \int_0^{\rho_d} I_9\,\rho\,d\rho = 2\pi\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}} -$$

$$-2\pi\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d} + \frac{2\pi\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}} -$$

$$-\frac{2\pi\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}}{\left(z-z_d\right)^2} + \frac{2\pi\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\sqrt{a^2-z_d^2}}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}} +$$

$$+\frac{2\pi\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}} - \frac{2\pi\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2-z_d^2}}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}} .$$

$$H_2=\int_0^{\rho_d} I_9\,\rho^3\,d\rho=\frac{2\pi}{3}\left(a^2-2R^2-3z_d^2+4zz_d\right)\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}\;-$$

$$-\frac{2\pi\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}+10\pi\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+$$

$$+\frac{2\pi\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}\left(2R^2+a^2+z_d^2-4zz_d+5\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}-$$

$$-\frac{2\pi\sqrt{a^2-z_d^2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}-10\pi\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}-$$

$$-\frac{2\pi\left(a^2-z_d^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+8\pi\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}+$$

$$+\frac{2\pi\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{4\pi}{3}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^{3/2}-$$

$$-\frac{8\pi}{3}\left[\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}+3\left(x^2+y^2\right)\right]\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$H_3 = \int_0^{\rho_d} I_{10}\, \rho^3\, d\rho =$$

$$= \pi \left(x^2 + y^2\right)^{3/2} \left[\begin{array}{l}
\dfrac{2R^2 + a^2 + z_d^2 - 4zz_d + 5\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2 - z_d^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2-z_d^2}}} - \dfrac{2\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \\
-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right) + \left(x^2+y^2\right)\sqrt{a^2-z_d^2}}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2-z_d^2}}} - \\
-\dfrac{3\left(a^2 - z_d^2\right)^2\left(\sqrt{a^2-z_d^2} + \sqrt{x^2+y^2}\right)}{2\left(z-z_d\right)^2\left(R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}} - \\
-\dfrac{6\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}} - \\
-\dfrac{3\left(a^2 - z_d^2\right)^2\left(\sqrt{a^2-z_d^2} + \sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(z-z_d\right)^4\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}} - \\
-\dfrac{15\sqrt{x^2+y^2} - 9\sqrt{a^2-z_d^2}}{2\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}} + \\
+\dfrac{17\sqrt{x^2+y^2}}{2\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d} + \dfrac{15}{2}\operatorname{Arsh}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d} + \\
+\dfrac{3\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}} - \\
-\dfrac{3\sqrt{x^2+y^2}\left(a^2-z_d^2\right)}{\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}} + \\
+\dfrac{3\left(x^2+y^2\right)\sqrt{a^2-z_d^2}}{\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}} - \\
-\dfrac{3\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2 + a^2 - 2zz_d + 2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}} + \\
+\dfrac{3\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d} - \dfrac{15}{2}\operatorname{Arsh}\dfrac{\sqrt{a^2-z_d^2} + \sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}
\end{array} \right]. \tag{71}$$

Теперь потенциал может быть выражен через интегралы по переменной z_d от представленных выше величин H_1, H_2 и H_3:

$$\varphi \approx \frac{\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} H_1\,dz_d + \frac{\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{8\pi c^2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} H_3\,dz_d - \frac{\eta\,\rho_0\,\rho_{0q}\gamma_c}{6c^2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} z_d^2 H_1\,dz_d - \frac{\eta\,\rho_0\rho_{0q}\gamma_c}{6c^2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} H_2\,dz_d \ . \qquad (72)$$

Ввиду громоздкости выражений H_1, H_2 и H_3 интегрирование в (72) становится затруднительным, кроме этого, решение выражается через специальные функции и не представимо в явном виде без разложения в ряды. В связи с этим рассмотрим здесь лишь три простейших случая.

Первый член в правой части (72), то есть член $\varphi' = \frac{\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} H_1\,dz_d$, не содержит скорость света и не зависит от угловой скорости вращения ω. В случае классического однородного твёрдого тела и в отсутствие вращения этот член должен задавать скалярный потенциал в соответствии с законом Кулона. И действительно, если вычислить φ' с помощью H_1 из (71) на оси OZ при условии $x = y = 0$, $z = R$, то будет:

$$H_1\left(z = R\right) = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2 - 2Rz_d} - 2\pi\left(R - z_d\right).$$

$$\varphi'\left(z = R\right) = \frac{\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} H_1\left(z = R\right)dz_d = \frac{\rho_{0q}a^3\gamma_c}{3\varepsilon_0 R}. \qquad (73)$$

У твёрдого тела фактор Лоренца в центре сферы $\gamma_c = 1$. Учитывая, что электрический заряд однородно заряженного твёрдого сферического тела есть $q = \frac{4\pi\rho_{0q}a^3}{3}$, имеем: $\varphi'\left(z = R\right) = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 R}$, что соответствует закону Кулона на оси OZ.

В случае релятивистской однородной системы потенциал (72) на оси OZ при условии $x = y = 0$, $z = R$ будет зависеть только от H_1 и H_2, так как H_3 обнуляется. Поскольку

$$H_2\left(z = R\right) = \frac{2\pi}{3}\left(a^2 - 2R^2 - 3z_d^2 + 4Rz_d\right)\sqrt{R^2 + a^2 - 2Rz_d} + \frac{4\pi}{3}\left(R - z_d\right)^3,$$

то с учётом (73) и (31) потенциал (72) становится равным:

$$\varphi(z=R) \approx \frac{\rho_{0q} a^3 \gamma_c}{3\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{2\pi\eta\,\rho_0\, a^2}{5c^2}\right) \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{74}$$

Особый интерес представляет определение потенциала на поверхности сферы там, где $z=0$, $R=a$. Используя H_1 из (71), выразим $\int\limits_{-a}^{a} H_1\, d z_d$ в (72) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-a}^{a} H_1\, d z_d = 2\pi I_{13} - 2\pi \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2z z_d}\, d z_d + 2\pi I_{14} - \\ -2\pi\left(x^2+y^2\right)\int\limits_{-a}^{a} \frac{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2z z_d}}{\left(z - z_d\right)^2}\, d z_d + 2\pi I_{15} + 2\pi I_{16} - 2\pi I_{17}.\end{gathered} \tag{75}$$

Здесь

$$I_{13} = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{R^2 + a^2 - 2z z_d + 2\sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}\, d z_d\ .$$

$$I_{14} = \left(x^2+y^2\right)^2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{d z_d}{\left(z - z_d\right)^2 \sqrt{R^2 + a^2 - 2z z_d + 2\sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}\ .$$

$$I_{15} = \left(x^2+y^2\right)^{3/2} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - z_d^2}}{\left(z - z_d\right)^2 \sqrt{R^2 + a^2 - 2z z_d + 2\sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}\, d z_d\ .$$

$$I_{16} = \left(x^2+y^2\right) \int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2z z_d + 2\sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}\, d z_d\ .$$

$$I_{17} = \sqrt{x^2+y^2} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - z_d^2}}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2z z_d + 2\sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}\, d z_d\ .$$

При $z=0$, $R=a$ все интегралы в (75) берутся точно без применения эллиптических интегралов, путём использования подстановки $z_d = a\sin 2\gamma$. В частности, имеем:

$$I_{13}\left(R=a\right)=\frac{8\sqrt{2}a^2}{3}. \qquad I_{14}\left(R=a\right)=-\frac{a^2}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)-\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.$$

$$I_{15}\left(R=a\right)=-\frac{\sqrt{2}a^2}{4}+\frac{5a^2}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right). \qquad I_{16}\left(R=a\right)=2\sqrt{2}a^2+2a^2\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$$I_{17}\left(R=a\right)=\frac{2\sqrt{2}a^2}{3}+2a^2\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right). \tag{76}$$

Подставляя (76) в (75), находим:

$$\int_{-a}^{a} H_1\left(R=a\right)d\,z_d = 2\pi\left[\frac{16\sqrt{2}a^2}{3}+5a^2\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)-3a^2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\approx 0{,}98\pi a^2 .$$

С другой стороны, для выполнения закона Кулона для неподвижного твёрдого тела при $z=0$, $R=a$, в (72) учитывается лишь первый член и должно быть $\int_{-a}^{a} H_1\,d\,z_d=\frac{4\pi a^2}{3}\approx 1{,}32\pi a^2$. Полученная выше величина $0{,}98\pi a^2$ оказывается на 26 % меньше. Различие возникло от того, что при вычислении интегралов I_9 в (65) и I_{10} в (66) было использовано разложение (69) полных эллиптических интегралов лишь до членов второго и третьего порядка, соответственно. Для большей точности следует использовать увеличенное количество членов разложения.

Таким образом можно констатировать, что скалярный потенциал за пределами сферы определяется точно на оси OZ, а в остальных направлениях у нас получается лишь приблизительная оценка, зависящая от количества используемых членов разложения в (69). Тем не менее, поскольку H_1 не зависит ни от скорости света, ни от угловой скорости вращения ω, то это относится и к потенциалу $\varphi'=\frac{\rho_{0q}\,\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} H_1\,d\,z_d$ в (72). Это означает, что значение потенциала φ' в произвольном направлении не может существенно отличаться от значения $\varphi'\left(z=R\right)$ в (73) на оси OZ и от $\varphi\left(z=R\right)$ в (74). Действительно, зависимость потенциала от направления радиус-вектора $\mathbf{R}$ от центра сферы до точки с координатами x,y,z, где вычисляется потенциал, могла бы возникнуть за счёт вращения. Однако потенциал φ' не зависит от ω , а у покоящейся сферы при $\omega = 0$ потенциал симметричен относительно выбора направления вектора $\mathbf{R}$.

В связи с этим будем считать, что в (72)

$$\varphi' = \frac{\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} H_1\, dz_d \approx \varphi'(z = R) = \frac{\rho_{0q}a^3\gamma_c}{3\varepsilon_0 R}. \tag{77}$$

Теперь нам осталось вычислить последние три члена в правой части (72), используя (71). Интегралы $\int_{-a}^{a} z_d^2 H_1\, dz_d$ и $\int_{-a}^{a} H_2\, dz_d$ можно оценить по их значению при $z = R$:

$$\int_{-a}^{a} z_d^2 H_1(z=R)\, dz_d \approx 2\pi\left(\frac{2a^5}{15R} + \frac{4a^7}{105R^3}...\right), \qquad \int_{-a}^{a} H_2(z=R)\, dz_d \approx 2\pi\left(\frac{4a^5}{15R} - \frac{4a^7}{105R^3}...\right).$$

При малых z вторые и последующие члены в скобках в правой части этих выражений становятся другими, однако первые члены не меняются. Поэтому в первом приближении можно принять, что

$$\int_{-a}^{a} z_d^2 H_1\, dz_d \approx \frac{4\pi a^5}{15R}, \qquad \int_{-a}^{a} H_2\, dz_d \approx \frac{8\pi a^5}{15R}. \tag{78}$$

Что касается интеграла $\int_{-a}^{a} H_3\, dz_d$, то он равен нулю при $z = R$, $x^2 + y^2 = 0$, и увеличивается до максимума при $z = 0$.

Из (71) и (70) после разложения $\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-5/2}$ в ряд при больших R с учётом соотношения $\rho_d^2 = a^2 - z_d^2$ приблизительно находим:

$$H_3(R >> a) = \int_0^{\rho_d} I_{10}\,\rho^3\, d\rho \approx \int_0^{\rho_d} \frac{\pi\left(x^2+y^2\right)\left(2R^2 + 2z_d^2 - 4zz_d + 2\rho^2 - 5\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)}{2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5/2}}\rho^3\, d\rho \approx$$

$$\approx \frac{\pi\left(x^2+y^2\right)\left(a^2 - z_d^2\right)^2}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^{3/2}} - \frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^{5/2}}\left[\frac{\left(a^2 - z_d^2\right)^3}{2} + 3\left(a^2 - z_d^2\right)^{5/2}\sqrt{x^2+y^2}\right].$$

Снова раскладывая $\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^{-3/2}$ и $\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^{-5/2}$ в ряды при больших R, до членов второго и первого порядка соответственно, имеем:

$$\int_{-a}^{a} H_3\left(R>>a\right)dz_d \approx \frac{4\pi\left(x^2+y^2\right)a^5}{15R^3}-\frac{15\pi^2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}a^6}{32R^5}-\frac{2\pi\left(x^2+y^2\right)a^7}{7R^5}.$$

С учётом этого, из (72), (77), (78) и (31) следует, что потенциал при достаточно больших R равен:

$$\varphi\left(R>>a\right)\approx\frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[1+\frac{\omega^2a^2(x^2+y^2)}{10c^2R^2}\left(1-\frac{225\pi a\sqrt{x^2+y^2}}{128R^2}-\frac{15a^2}{14R^2}\right)\right]. \tag{79}$$

Потенциал (79) фактически имеет ту же зависимость от угловой скорости ω, что и потенциал (32) в средней зоне, но он не точен в ближней зоне там, где радиус R ненамного больше радиуса сферы a.

Мы можем ещё оценить потенциал в случае, когда $z=0$, $R=a$, и все интегралы берутся достаточно легко. Используя H_3 из (71), находим:

$$\int_{-a}^{a} H_3\left(R=a\right)dz_d=-\frac{1279\sqrt{2}\pi a^4}{240}-\frac{427\pi a^4}{16}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)\approx 15{,}98\pi a^4.$$

Вместо (79) для потенциала получается:

$$\varphi\left(R=a\right)\approx\frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{6\omega^2a^2}{c^2}\right). \tag{80}$$

Из сравнения (80) с (79) видно, что в наших расчётах при $z=0$ на поверхности вращающейся сферы поправка по отношению к потенциалу неподвижной сферы достигает величины порядка $\dfrac{6\omega^2a^2}{c^2}$.

2.9. Векторный потенциал в ближней зоне

Основываясь на подобии формул для скалярного потенциала (16) и векторного потенциала (18), мы с учётом (63) можем выразить компоненты векторного потенциала вращающегося диска в ближней зоне:

$$A_{dx} \approx -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\omega^2 \rho^2 (x\sin\phi - y\cos\phi)^2}{2c^2 R_P^2} + \\ + \dfrac{\omega^2 \rho x}{c^2} \cos\phi + \dfrac{\omega^2 \rho y}{c^2} \sin\phi \end{array} \right] \frac{\gamma' \sin\hat{\phi}\, \rho^2 d\rho\, d\phi}{R_P} .$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\omega^2 \rho^2 (x\sin\phi - y\cos\phi)^2}{2c^2 R_P^2} + \\ + \dfrac{\omega^2 \rho x}{c^2} \cos\phi + \dfrac{\omega^2 \rho y}{c^2} \sin\phi \end{array} \right] \frac{\gamma' \cos\hat{\phi}\, \rho^2 d\rho\, d\phi}{R_P} .$$

Полагая $\hat{R}_P \approx R_P$, вместо (19) имеем следующее:

$$\cos\hat{\phi} \approx \cos\phi + \frac{\omega R_P}{c} \sin\phi, \qquad \sin\hat{\phi} \approx \sin\phi - \frac{\omega R_P}{c} \cos\phi .$$

Преобразуем с учётом этого компоненты A_{dx} и A_{dy} векторного потенциала:

$$\begin{aligned} A_{dx} \approx & -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\omega^2 \rho^2 (x\sin\phi - y\cos\phi)^2}{2c^2 R_P^2} + \\ + \dfrac{\omega^2 \rho x}{c^2} \cos\phi + \dfrac{\omega^2 \rho y}{c^2} \sin\phi \end{array} \right] \frac{\gamma' \sin\phi\, \rho^2 d\rho\, d\phi}{R_P} + \\ & + \frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q}}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\omega^2 \rho^2 (x\sin\phi - y\cos\phi)^2}{2c^2 R_P^2} + \\ + \dfrac{\omega^2 \rho x}{c^2} \cos\phi + \dfrac{\omega^2 \rho y}{c^2} \sin\phi \end{array} \right] \gamma' \cos\phi\, \rho^2 d\rho\, d\phi. \end{aligned}$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\omega^2 \rho^2 \left(x \sin\phi - y \cos\phi \right)^2}{2c^2 R_P^2} + \\ + \dfrac{\omega^2 \rho x}{c^2} \cos\phi + \dfrac{\omega^2 \rho y}{c^2} \sin\phi \end{array} \right] \frac{\gamma' \cos\phi \, \rho^2 \, d\rho \, d\phi}{R_P} +$$

$$+ \frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q}}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\omega^2 \rho^2 \left(x \sin\phi - y \cos\phi \right)^2}{2c^2 R_P^2} + \\ + \dfrac{\omega^2 \rho x}{c^2} \cos\phi + \dfrac{\omega^2 \rho y}{c^2} \sin\phi \end{array} \right] \gamma' \sin\phi \, \rho^2 \, d\rho \, d\phi. \tag{81}$$

Здесь R_P задаётся в (62).

В дополнение к интегралам I_{11} и I_{12} из (64), при интегрировании по углу ϕ в (81) необходимо вычислить следующие интегралы:

$$I_{18} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(x \sin\phi - y \cos\phi \right)^2 \sin\phi}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi \right)^{3/2}} d\phi .$$

$$I_{19} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(x \sin\phi - y \cos\phi \right)^2 \cos\phi}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi \right)^{3/2}} d\phi .$$

$$I_{20} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(x \sin\phi - y \cos\phi \right)^2 \sin\phi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi} d\phi .$$

$$I_{21} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(x \sin\phi - y \cos\phi \right)^2 \cos\phi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi} d\phi .$$

$$I_{22} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi}} d\phi .$$

$$I_{23} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x \cos\phi - 2\rho y \sin\phi}} d\phi .$$

$$I_{24} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi}} d\phi .$$

(82)

С учётом этих интегралов (81) можно переписать так:

$$A_{dx} \approx -\frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{\rho_d} \left(I_{12} - \frac{\omega^2 \rho^2}{2c^2} I_{18} + \frac{\omega^2 \rho x}{c^2} I_{24} + \frac{\omega^2 \rho y}{c^2} I_{22} \right) \gamma' \rho^2 d\rho +$$
$$+\frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q}}{4\pi c} \int_0^{\rho_d} \left(\frac{\pi \omega^2 \rho x}{c^2} - \frac{\omega^2 \rho^2}{2c^2} I_{21} \right) \gamma' \rho^2 d\rho .$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega s \rho_{0q}}{4\pi} \int_0^{\rho_d} \left(I_{11} - \frac{\omega^2 \rho^2}{2c^2} I_{19} + \frac{\omega^2 \rho x}{c^2} I_{23} + \frac{\omega^2 \rho y}{c^2} I_{24} \right) \gamma' \rho^2 d\rho +$$
$$+\frac{\mu_0 \omega^2 s \rho_{0q}}{4\pi c} \int_0^{\rho_d} \left(\frac{\pi \omega^2 \rho y}{c^2} - \frac{\omega^2 \rho^2}{2c^2} I_{20} \right) \gamma' \rho^2 d\rho.$$

(83)

Интегралы (82) получаются в следующем виде:

$$I_{18} \approx -\frac{2\pi y \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + \rho\sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\rho \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{3/2}} .$$

$$I_{19} \approx -\frac{2\pi x \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + \rho\sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\rho \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{3/2}} .$$

$$I_{20} = \frac{\pi y \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 \right)^2}{4\rho^3 \left(x^2 + y^2 \right)} - \frac{\pi y}{2\rho} .$$

$$I_{21} = \frac{\pi x \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 \right)^2}{4\rho^3 \left(x^2 + y^2 \right)} - \frac{\pi x}{2\rho} .$$

$$I_{22} \approx \frac{2\pi x^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}+$$
$$+\frac{2\pi\rho y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}}.$$

$$I_{23} \approx \frac{2\pi y^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}}}+$$
$$+\frac{2\pi\rho x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}}.$$

$$I_{24} \approx -\frac{2\pi xy\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}}.$$

При вычислении I_{18}, I_{19}, I_{22}, I_{23}, I_{24} появляются эллиптические интегралы, которые с помощью (69) были разложены до членов второго порядка.

С учётом этих интегралов, а также (27) и интегралов I_{11}, I_{12} из (70), выражения (83) приобретают следующий вид:

$$A_{dx} \approx -\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}ys\gamma_c}{4}\int\limits_0^{\rho_d}\frac{\left\{\begin{aligned}&1-\frac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)}{3c^2}+\\&+\frac{\omega^2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+3\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)}{c^2}-\\&-\frac{9\rho\sqrt{x^2+y^2}\left[1-\frac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)}{3c^2}\right]}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)}\end{aligned}\right\}\rho^3 d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2+2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}}-$$
$$-\frac{\mu_0\omega^4\rho_{0q}xs\gamma_c}{16c^3}\int\limits_0^{\rho_d}\left[\frac{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}{2\rho\left(x^2+y^2\right)}-5\rho\right]\rho^2 d\rho.$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} xs\gamma_c}{4} \int_0^{\rho_d} \frac{\left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2 + z_d^2\right)}{3c^2} + \\ + \dfrac{\omega^2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 3\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)}{c^2} - \\ - \dfrac{9\rho\sqrt{x^2+y^2}\left[1 - \dfrac{2\pi\eta\rho_0\left(\rho^2+z_d^2\right)}{3c^2}\right]}{2\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)} \end{array} \right\} \rho^3 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}} -$$

$$- \frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} ys\gamma_c}{16c^3} \int_0^{\rho_d} \left(\frac{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2}{2\rho\left(x^2+y^2\right)} - 5\rho \right) \rho^2 d\rho.$$

Если обозначить

$$I_{25} = \int_0^{\rho_d} \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}}},$$

$$I_{26} = \int_0^{\rho_d} \frac{\rho^3 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}},$$

$$I_{27} = \int_0^{\rho_d} \frac{\rho^4 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}},$$

$$I_{28} = \int_0^{\rho_d} \frac{\rho^5 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}},$$

$$I_{29} = \int_0^{\rho_d} \frac{\rho^4 d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5/2}},$$

$$I_{30} = \int_0^{\rho_d} \frac{\rho^6 \, d\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2}\right)^{5/2}}, \tag{84}$$

то компоненты векторного потенциала с учётом соотношения $\rho_d^2 = a^2 - z_d^2$ выразятся так:

$$A_{dx} \approx -\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} y s \gamma_c}{4} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right) I_{26} - \frac{2\pi\eta\rho_0}{3c^2} I_{28} + \frac{\omega^2}{c^2} I_{25} + \\ + \frac{\omega^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{27} + \frac{3\pi\eta\rho_0\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{30} + \\ + \left(\frac{3\pi\eta\rho_0 z_d^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} - \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) I_{29} \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} x s \gamma_c}{192 c^3 \left(x^2+y^2\right)} \left[\left(R^2 + a^2 - 2zz_d\right)^3 - \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^3 - 15\left(x^2+y^2\right)\left(a^2 - z_d^2\right)^2\right].$$

$$A_{dy} \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} x s \gamma_c}{4} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right) I_{26} - \frac{2\pi\eta\rho_0}{3c^2} I_{28} + \frac{\omega^2}{c^2} I_{25} + \\ + \frac{\omega^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{27} + \frac{3\pi\eta\rho_0\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{30} + \\ + \left(\frac{3\pi\eta\rho_0 z_d^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} - \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) I_{29} \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} y s \gamma_c}{192 c^3 \left(x^2+y^2\right)} \left[\left(R^2 + a^2 - 2zz_d\right)^3 - \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d\right)^3 - 15\left(x^2+y^2\right)\left(a^2 - z_d^2\right)^2\right].$$

Компоненты A_{dx} и A_{dy} представляют собой компоненты векторного потенциала, возникающие от вращения одного слоя в виде диска внутри сферы. Для перехода к компоненте A_x векторного потенциала от всей сферы необходимо заменить s на дифференциал dz_d, а сумму компонент A_{dx} рассматривать как интеграл по всем слоям сферы, зависящий от переменной z_d. То же самое следует для A_{dy}. Это даёт следующее:

$$A_x \approx -\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} y \gamma_c}{4} \int_{-a}^{a} \left[\begin{array}{l} \left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right) I_{26} - \frac{2\pi\eta\rho_0}{3c^2} I_{28} + \frac{\omega^2}{c^2} I_{25} + \\ +\frac{\omega^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{27} + \frac{3\pi\eta\rho_0\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{30} + \\ +\left(\frac{3\pi\eta\rho_0 z_d^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} - \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) I_{29} \end{array} \right] d z_d -$$

$$-\frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} x \gamma_c}{192 c^3 \left(x^2+y^2\right)} \int_{-a}^{a} \left[\left(R^2 + a^2 - 2 z z_d\right)^3 - \left(R^2 + z_d^2 - 2 z z_d\right)^3 - 15\left(x^2+y^2\right)\left(a^2 - z_d^2\right)^2 \right] d z_d .$$

$$A_y \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} x \gamma_c}{4} \int_{-a}^{a} \left[\begin{array}{l} \left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right) I_{26} - \frac{2\pi\eta\rho_0}{3c^2} I_{28} + \frac{\omega^2}{c^2} I_{25} + \\ +\frac{\omega^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{27} + \frac{3\pi\eta\rho_0\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} I_{30} + \\ +\left(\frac{3\pi\eta\rho_0 z_d^2\sqrt{x^2+y^2}}{c^2} - \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) I_{29} \end{array} \right] d z_d -$$

$$-\frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} y \gamma_c}{192 c^3 \left(x^2+y^2\right)} \int_{-a}^{a} \left[\left(R^2 + a^2 - 2 z z_d\right)^3 - \left(R^2 + z_d^2 - 2 z z_d\right)^3 - 15\left(x^2+y^2\right)\left(a^2 - z_d^2\right)^2 \right] d z_d . \qquad (85)$$

Интегралы в (84) с учётом соотношений $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $R^2 + z_d^2 - 2 z z_d + \rho^2 + 2\rho\sqrt{x^2+y^2} = \left(z - z_d\right)^2 + \left(\rho + \sqrt{x^2+y^2}\right)^2$, $\rho_d^2 = a^2 - z_d^2$, равны:

$$I_{25} = \frac{2a^2 + \sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2} - 2z_d^2 + 5\left(x^2+y^2\right)}{2} \sqrt{R^2 + a^2 - 2 z z_d + 2\sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}} -$$

$$-\frac{2}{3}\left(R^2 + a^2 - 2 z z_d + 2\sqrt{a^2 - z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2} +$$

$$+\frac{4R^2 + 4z_d^2 - 8 z z_d - 15\left(x^2+y^2\right)}{6} \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2 z z_d} +$$

$$+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\left[3z_d^2 - 6 z z_d + 3R^2 - 5\left(x^2+y^2\right)\right] \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{a^2 - z_d^2} + \sqrt{x^2+y^2}}{z - z_d} -$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\left[3z_d^2 - 6 z z_d + 3R^2 - 5\left(x^2+y^2\right)\right] \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z - z_d} .$$

$$I_{26}=\frac{2R^2+a^2+z_d^2-4zz_d+5\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2-z_d^2}}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2-z_d^2}}}-2\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-$$

$$-\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)+\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\sqrt{a^2-z_d^2}}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2-z_d^2}}}+\frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}}{\left(z-z_d\right)^2}-$$

$$-3\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+3\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}.$$

$$I_{27}=-\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}\left(x^2+y^2\right)\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)+\left(a^2-z_d^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}\left(2R^2+a^2+z_d^2-4zz_d+5\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}-\frac{15}{2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+$$

$$+\frac{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-$$

$$-\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+13\sqrt{x^2+y^2}}{2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+\frac{15}{2}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+\frac{13\sqrt{x^2+y^2}}{2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-$$

$$-\frac{3}{2}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+\frac{3}{2}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}.$$

$$
\begin{aligned}
I_{28} = &-\frac{\left(a^2-z_d^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}-\\
&-\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+\\
&+\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\\
&-\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-\\
&-\frac{\left(a^2-z_d^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}-\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}\left(\sqrt{a^2-z_d^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+\\
&+\frac{4\left(a^2-z_d^2\right)}{3}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\\
&+\frac{33\left(x^2+y^2\right)}{2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{33\left(x^2+y^2\right)}{2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-\\
&-\frac{29\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}{6}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\\
&-\frac{8}{3}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{8}{3}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)^{3/2}+\\
&+\frac{15\sqrt{x^2+y^2}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)}{2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}-\\
&-\frac{15\sqrt{x^2+y^2}\left(R^2+z_d^2-2zz_d\right)}{2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}-\\
&-\frac{35\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+\frac{35\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}.
\end{aligned}
$$

$$I_{29}=\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^2\left(\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{3\left(z-z_d\right)^2\left(R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{4\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^2\left(\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{3\left(z-z_d\right)^4\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{5\sqrt{x^2+y^2}-3\sqrt{a^2-z_d^2}}{3\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-$$

$$-\frac{5\sqrt{x^2+y^2}}{3\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-$$

$$-\frac{2\sqrt{a^2-z_d^2}\left(x^2+y^2\right)}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+\frac{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-$$

$$-\frac{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}+\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}-\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}.$$

$$I_{30}=\frac{\left(a^2-z_d^2\right)^3\left(\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{3\left(z-z_d\right)^2\left(R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^{7/2}}{3\left(z-z_d\right)^4\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^3\sqrt{x^2+y^2}}{3\left(z-z_d\right)^4\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^4\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{4\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}\left(x^2+y^2\right)^2}{3\left(z-z_d\right)^4\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}{3\left(z-z_d\right)^4\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^{5/2}}{\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^2\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}}-$$

$$-\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^{5/2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^2\sqrt{x^2+y^2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-$$

$$-\frac{2\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}\left(x^2+y^2\right)}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-$$

$$-\frac{2\sqrt{a^2-z_d^2}\left(x^2+y^2\right)^2}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\\
&-\frac{2\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}{3\left(z-z_d\right)^4}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-\frac{5\left(a^2-z_d^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\\
&+\frac{3\sqrt{x^2+y^2}\left(a^2-z_d^2\right)}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\\
&-\frac{4\sqrt{a^2-z_d^2}\left(x^2+y^2\right)}{\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\\
&+\frac{14\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{14\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}{3\left(z-z_d\right)^2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}-\\
&-\frac{27\sqrt{x^2+y^2}}{2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{27\sqrt{x^2+y^2}}{2}\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d}+\\
&+\frac{5\sqrt{a^2-z_d^2}}{2}\sqrt{R^2+a^2-2zz_d+2\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{x^2+y^2}}-\\
&-\frac{5\left(z-z_d\right)^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+\frac{5\left(z-z_d\right)^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}+\\
&+15\left(x^2+y^2\right)\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}-15\left(x^2+y^2\right)\operatorname{Arsh}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-z_d}.
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Теперь можно использовать представленные выше выражения для интегралов I_{25}, I_{26}, I_{27}, I_{28}, I_{29} и I_{30}, чтобы подставить их в (85) и вычислить компоненты векторного потенциала.

Здесь надо напомнить, что в ходе расчётов интегралы I_{11} и I_{12}, определённые в (64), (67) и (68), вычислялись в (70) приблизительно, путём применения в (69) разложения до членов второго порядка. То же самое следует и для интегралов I_{18}, I_{19}, I_{22}, I_{23}, I_{24}. Всё это привело к появлению выражений (83), которые в общем случае ещё недостаточны для точного вычисления компонент потенциала.

Аналогичная ситуация была и в предыдущем разделе, где мы нашли, что отклонение скалярного потенциала в наших расчётах в плоскости экватора на поверхности сферы достигло 26 % из-за применения не всех членов разложения в (69). Поэтому следует ожидать, что хотя в (85) и правильно показывается зависимость компонент векторного потенциала от координат x, y, z, но по мере приближения к сфере и к плоскости экватора неточность увеличивается.

В связи с этим рассмотрим далее два частных случая, когда компоненты потенциала вычисляются сравнительно просто и позволяют легко анализировать решение. Первый случай относится к области пространства вблизи оси OZ, где можно считать, что $z \approx R$, $R >> x$, $R >> y$. Второй случай относится к точкам на поверхности сферы, где $z = 0$, $R^2 = x^2 + y^2$, причём $R = a$.

2.9.1. Случай $z \approx R$

В этом случае при $x \approx 0$, $y \approx 0$ интегралы I_{11} и I_{12}, определённые в (64) и найденные в (67-68), могут быть упрощены, если сделать замену:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi}} \approx \frac{1 + \dfrac{\rho x\cos\phi + \rho y\sin\phi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}}.$$

Это даёт следующее:

$$I_{11} \approx \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 + \dfrac{\rho x\cos\phi + \rho y\sin\phi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}\right)}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} \cos\phi\, d\phi = \frac{\pi\rho x}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}}.$$

$$I_{12} \approx \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 + \dfrac{\rho x\cos\phi + \rho y\sin\phi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}\right)}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} \sin\phi\, d\phi = \frac{\pi\rho y}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}}.$$

Аналогично для интегралов в (82) используем приблизительные выражения:

$$\frac{1}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi\right)^{3/2}} \approx \frac{1 + \dfrac{3\rho x\cos\phi + 3\rho y\sin\phi}{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}}.$$

$$\frac{1}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2-2\rho x\cos\phi-2\rho y\sin\phi}\approx\frac{1+\dfrac{2\rho x\cos\phi+2\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2-2\rho x\cos\phi-2\rho y\sin\phi}}\approx$$

$$\approx\frac{1+\dfrac{\rho x\cos\phi+\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}+\dfrac{3\left(\rho x\cos\phi+\rho y\sin\phi\right)^2}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}.$$

С помощью этого находим:

$$I_{18}\approx\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\dfrac{3\rho x\cos\phi+3\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}\right)\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2\sin\phi}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}d\phi=\frac{3\pi\rho y\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{5/2}}.$$

$$I_{19}\approx\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\dfrac{3\rho x\cos\phi+3\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}\right)\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2\cos\phi}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}d\phi=\frac{3\pi\rho x\left(x^2+y^2\right)}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{5/2}}.$$

$$I_{20}\approx\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\dfrac{2\rho x\cos\phi+2\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}\right)\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}d\phi=\frac{\pi\rho y\left(x^2+y^2\right)}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{2}}.$$

$$I_{21}\approx\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\dfrac{2\rho x\cos\phi+2\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}\right)\left(x\sin\phi-y\cos\phi\right)^2\cos\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}d\phi=\frac{\pi\rho x\left(x^2+y^2\right)}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{2}}.$$

$$I_{24}\approx\int_0^{2\pi}\frac{\left(1+\dfrac{\rho x\cos\phi+\rho y\sin\phi}{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}+\dfrac{3\left(\rho x\cos\phi+\rho y\sin\phi\right)^2}{2\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^2}\right)\sin\phi\cos\phi}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}d\phi=$$

$$=\frac{3\pi\rho^2xy}{4\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{5/2}}.$$

Что касается интегралов I_{22} и I_{23} в (82), то для них получается $I_{22} \approx I_{23} \approx \frac{\pi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}}$.

С учётом этого вместо (83) имеем:

$$A_{dx}(z \approx R) \approx -\frac{\mu_0 \omega y s \rho_{0q}}{4} \int_0^{\rho_d} \left(\begin{array}{l} \frac{\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} - \\ -\frac{3\omega^2 \rho^3 \left(x^2 + y^2\right)}{8c^2 \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{5/2}} + \\ +\frac{3\omega^2 \rho^3 x^2}{4c^2 \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{5/2}} + \\ +\frac{\omega^2 \rho}{c^2 \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} \end{array} \right) \gamma' \rho^2 d\rho +$$

$$+\frac{\mu_0 \omega^4 x s \rho_{0q}}{4c^3} \int_0^{\rho_d} \left(1 - \frac{\rho^2 \left(x^2 + y^2\right)}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2} \right) \gamma' \rho^3 d\rho.$$

$$A_{dy}(z \approx R) \approx \frac{\mu_0 \omega x s \rho_{0q}}{4} \int_0^{\rho_d} \left(\begin{array}{l} \frac{\rho}{\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{3/2}} - \\ -\frac{3\omega^2 \rho^3 \left(x^2 + y^2\right)}{8c^2 \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{5/2}} + \\ +\frac{\omega^2 \rho}{c^2 \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2}} + \\ +\frac{3\omega^2 \rho^3 y^2}{4c^2 \left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^{5/2}} \end{array} \right) \gamma' \rho^2 d\rho +$$

$$+\frac{\mu_0 \omega^4 y s \rho_{0q}}{4c^3} \int_0^{\rho_d} \left(1 - \frac{\rho^2 \left(x^2 + y^2\right)}{4\left(R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2\right)^2} \right) \gamma' \rho^3 d\rho.$$

В данных выражениях можно пренебречь малыми членами, содержащими в числителе x^2, y^2 и $x^2 + y^2$. После подстановки фактора Лоренца γ' из (27) с учётом выражения $\rho_d^2 = a^2 - z_d^2$ находим:

$$A_{dx}(z \approx R) \approx -\frac{\mu_0 c^2 ys\rho_{0q}\gamma_c}{\omega\left(x^2+y^2\right)}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)I_3 - \frac{\mu_0 \omega ys\rho_{0q}}{4}D_4 -$$
$$-\frac{\mu_0\omega^3 ys\rho_{0q}\gamma_c}{4c^2}I_{31} + \frac{\mu_0\omega^4 xs\rho_{0q}\gamma_c\left(a^2-z_d^2\right)^2}{16c^3}.$$

$$A_{dy}(z \approx R) \approx \frac{\mu_0 c^2 xs\rho_{0q}\gamma_c}{\omega\left(x^2+y^2\right)}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)I_3 + \frac{\mu_0 \omega xs\rho_{0q}}{4}D_4 +$$
$$+\frac{\mu_0\omega^3 xs\rho_{0q}\gamma_c}{4c^2}I_{31} + \frac{\mu_0\omega^4 ys\rho_{0q}\gamma_c\left(a^2-z_d^2\right)^2}{16c^3}.$$

Интеграл

$$I_3 = \frac{\omega^2\left(x^2+y^2\right)}{4c^2}\int_0^{\rho_d}\frac{\rho^3\,d\rho}{\left(R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2\right)^{3/2}}$$

мы вычисляли ранее в (28) и затем использовали в (29), а величину D_4 определили в (42). Кроме этого добавлен интеграл:

$$I_{31} = \int_0^{\rho_d}\frac{\rho^3\,d\rho}{\sqrt{R^2+z_d^2-2zz_d+\rho^2}}\ .$$

Вместо (85) компоненты векторного потенциала вблизи оси OZ становятся равными:

$$A_x(z \approx R) \approx -\frac{\mu_0 c^2 \rho_{0q} y\gamma_c}{\omega\left(x^2+y^2\right)}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)I_3\,dz_d - \frac{\mu_0\omega\rho_{0q} y}{4}\int_{-a}^{a}D_4\,dz_d -$$
$$-\frac{\mu_0\omega^3\rho_{0q} y\gamma_c}{4c^2}\int_{-a}^{a}I_{31}\,dz_d + \frac{\mu_0\omega^4\rho_{0q} x\gamma_c}{16c^3}\int_{-a}^{a}\left(a^2-z_d^2\right)^2 dz_d.$$

$$A_y(z \approx R) \approx \frac{\mu_0 c^2 \rho_{0q} x\gamma_c}{\omega\left(x^2+y^2\right)}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 z_d^2}{3c^2}\right)I_3\,dz_d + \frac{\mu_0\omega\rho_{0q} x}{4}\int_{-a}^{a}D_4\,dz_d +$$
$$+\frac{\mu_0\omega^3\rho_{0q} x\gamma_c}{4c^2}\int_{-a}^{a}I_{31}\,dz_d + \frac{\mu_0\omega^4\rho_{0q} y\gamma_c}{16c^3}\int_{-a}^{a}\left(a^2-z_d^2\right)^2 dz_d.$$

На больших расстояниях, когда $z \approx R$, $R > a$, будет

$$\int_{-a}^{a} D_4 \, d z_d \approx -\frac{2\pi \eta \rho_0 \gamma_c}{3c^2}\left(\frac{16a^7}{105R^3} - \frac{16a^9}{315R^5} \right), \qquad \int_{-a}^{a} I_{31} \, d z_d \approx \frac{4a^5}{15R} - \frac{4a^7}{105R^3},$$

$$\int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{2\pi \eta \rho_0 z_d^2}{3c^2} \right) I_3 \, d z_d \approx \frac{\omega^2 a^5 \left(x^2 + y^2 \right)}{15c^2 R^3} - \frac{2\pi \eta \rho_0 \omega^2 \left(x^2 + y^2 \right)}{12c^4} \left(\frac{4a^7}{105R^3} + \frac{16a^9}{315R^5} \right),$$

и получается следующее:

$$A_x \left(z \approx R > a \right) \approx -\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15R^3} \left(1 - \frac{10\pi \eta \rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{7c^2} \right) -$$
$$- \frac{\mu_0 \omega^3 \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15c^2 R} + \frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15c^3}.$$

$$A_y \left(z \approx R > a \right) \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15R^3} \left(1 - \frac{10\pi \eta \rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{7c^2} \right) +$$
$$+ \frac{\mu_0 \omega^3 \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15c^2 R} + \frac{\mu_0 \omega^4 \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15c^3}.$$

(87)

2.9.2. Случай $R = \sqrt{x^2 + y^2} = a$

Рассмотрим теперь второй случай, относящийся к точкам на поверхности сферы, где $z = 0$, $R^2 = x^2 + y^2$, при этом $R = a$.

С целью упрощения расчётов ограничимся в (85) лишь самыми большими членами, которые не содержат в знаменателе c^2 и c^3. Это даёт следующее:

$$A_x \left(R = \sqrt{x^2 + y^2} = a \right) \approx -\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} y \gamma_c}{4} \int_{-a}^{a} \left(I_{26} - \frac{9a}{2} I_{29} \right) d z_d .$$

$$A_y \left(R = \sqrt{x^2 + y^2} = a \right) \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} x \gamma_c}{4} \int_{-a}^{a} \left(I_{26} - \frac{9a}{2} I_{29} \right) d z_d .$$

(88)

Интегралы I_{26} и I_{29} в (84) с учётом соотношения $\rho_d^2 = a^2 - z_d^2$ будут равны:

$$I_{26}\left(R=\sqrt{x^2+y^2}=a\right)=\frac{z_d^2+5a\sqrt{a^2-z_d^2}+2a^2}{\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}-\frac{a^3\left(\sqrt{a^2-z_d^2}+a\right)}{z_d^2\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}-$$

$$-\frac{2z_d^2+a^2}{\sqrt{a^2+z_d^2}}+\frac{a^4}{z_d^2\sqrt{a^2+z_d^2}}-3a\,\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}+a}{z_d}+3a\,\mathrm{Arsh}\frac{a}{z_d}.$$

$$I_{29}\left(R=\sqrt{x^2+y^2}=a\right)=-\frac{\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^3}{3\left(2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^{3/2}}+\frac{4a\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^2}{3\left(2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^{3/2}}-$$

$$-\frac{2a^2\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)}{\left(2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^{3/2}}+\frac{4a^3}{3\left(2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^{3/2}}-\frac{a^4\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^3}{3z_d^4\left(2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^{3/2}}+$$

$$+\frac{\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^3}{3z_d^2\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}-\frac{4a\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)^2}{3z_d^2\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}-\frac{2\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)}{3\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}+$$

$$+\frac{4a}{3\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}+\frac{2a^2\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)}{z_d^2\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}+\frac{a^4\left(a+\sqrt{a^2-z_d^2}\right)}{z_d^4\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}-$$

$$-\frac{\sqrt{a^2-z_d^2}\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}{3z_d^2}+\frac{a\sqrt{2a^2+2a\sqrt{a^2-z_d^2}}}{z_d^2}-$$

$$-\frac{2a^3}{3z_d^4}\sqrt{a^2+z_d^2}-\frac{5a}{3z_d^2}\sqrt{a^2+z_d^2}+\mathrm{Arsh}\frac{a+\sqrt{a^2-z_d^2}}{z_d}-\mathrm{Arsh}\frac{a}{z_d}.$$

После интегрирования по переменной z_d и подстановки в (88) находим:

$$\int_{-a}^{a} I_{26}\,d\,z_d=-a^2\left[\frac{121\sqrt{2}}{15}+7\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)+6\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\approx 0{,}04986a^2\,.$$

$$\int_{-a}^{a}\left(-\frac{9a}{2}I_{29}\right)dz_d=-a^2\left[\frac{2181\sqrt{2}}{80}+\frac{555}{16}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)+9\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\approx-0,04998a^2\,.$$

$$A_x\left(R=\sqrt{x^2+y^2}=a\right)\approx-\frac{10^{-4}\mu_0\omega\rho_{0q}a^2y\gamma_c}{4}\,,$$

$$A_y\left(R=\sqrt{x^2+y^2}=a\right)\approx\frac{10^{-4}\mu_0\omega\rho_{0q}a^2x\gamma_c}{4}\,. \qquad (89)$$

Если же исходить из вида (60) и (87), компоненты векторного потенциала при $z=0$ и $R=a$ должны быть приблизительно такими:

$$A_x\approx-\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^2y\gamma_c}{15}\,,\qquad A_y\approx\frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^2x\gamma_c}{15}\,. \qquad (90)$$

По всей видимости, отличие результата (89) от (90) получилось вследствие неточности, возникшей при нахождении интегралов I_{11}, I_{12}, I_{18}, I_{19}, I_{22}, I_{23}, I_{24} путём разложения в ряд эллиптических интегралов до членов второго порядка. Хотя общее поведение векторного потенциала за пределами вращающейся заряженной сферы определяется верно, но этой точности оказывается недостаточно для корректного определения векторного потенциала непосредственно на экваторе сферы, и здесь требуется разложение эллиптических интегралов до членов более высокого порядка.

2.10. Электрическое и магнитное поля в ближней зоне

Согласно (46), электрическое поле зависит от скоростей изменения потенциалов в пространстве и времени. Так как векторный потенциал при постоянном вращении частиц сферы не зависит от времени, то будет справедливо выражение $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$. Используя (72), для электрического поля находим выражение через сумму интегралов:

$$\mathbf{E}\approx-\frac{\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\nabla H_1\,dz_d-\frac{\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{8\pi c^2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\nabla H_3\,dz_d+\frac{\eta\rho_0\rho_{0q}\gamma_c}{6c^2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}z_d^2\nabla H_1\,dz_d+$$
$$+\frac{\eta\rho_0\rho_{0q}\gamma_c}{6c^2\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\nabla H_2\,dz_d\,.$$

(91)

Данное выражение не является ещё окончательным, так как в нём требуется вначале взять пространственные градиенты от величин H_1, H_2 и H_3 из (71), а затем произвести интегрирование по переменной z_d.

Ситуация на оси OZ оказывается намного проще. Здесь с учётом (74) поле зависит от расстояния R приблизительно по закону Кулона для заряда q_ω:

$$\mathbf{E}(z=R) = -\nabla\varphi(z=R) = -\frac{d\varphi(z=R)}{d\mathbf{R}} \approx -\frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{d\mathbf{R}}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{R}^2}} = \frac{q_\omega \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}. \qquad (92)$$

При малых z, когда $x^2+y^2 \approx R^2$ и $R >> a$, для оценки электрического поля можно использовать (79):

$$\mathbf{E}(R>>a) = -\nabla\varphi(R>>a) \approx \frac{q_\omega \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(1+\frac{\omega^2 a^2}{10c^2}\right). \qquad (93)$$

Если исходить из вида (80), то при $z=0$, $R \approx a$, для электрического поля получается следующее:

$$\mathbf{E}(R\approx a) = -\nabla\varphi(R\approx a) \approx \frac{q_\omega \mathbf{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(1+\frac{6\omega^2 a^2}{c^2}\right). \qquad (94)$$

Неточность в определении $\mathbf{E}(R\approx a)$ зависит от неточности потенциала в (80).

В (85) были представлены приблизительные выражения для компонент векторного потенциала $\mathbf{A}$, причём в эти выражения следует подставить интегралы (86). Последующее применение операции ротора позволяет найти магнитное поле по формуле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, однако результат получается громоздким.

Выражения для компонент векторного потенциала существенно упрощаются вблизи оси OZ. Оставляя в (87) самые большие члены и учитывая, что $A_z = 0$, находим:

$$A_x(z \approx R > a) \approx -\frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 y \gamma_c}{15R^3}\left(1 - \frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{7c^2}\right).$$

$$A_y(z \approx R > a) \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 x \gamma_c}{15R^3}\left(1 - \frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{7c^2}\right).$$

$$B_x(z \approx R > a) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 x z \gamma_c}{5R^5}\left(1 - \frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{7c^2}\right).$$

$$B_y(z \approx R > a) = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 y z \gamma_c}{5R^5}\left(1 - \frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{7c^2}\right)$$

$$B_z(z \approx R > a) = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \approx \frac{\mu_0 \omega \rho_{0q} a^5 \gamma_c \left(2R^2 - 3x^2 - 3y^2\right)}{15R^5}\left(1 - \frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2} - \frac{\omega^2 a^2}{7c^2}\right).$$

(95)

В (95) $R > a$, но R не намного превышает радиус сферы a.

Компоненты магнитного поля в (95) фактически повторяют выражения (47) для магнитного поля в средней зоне, с небольшим различием в членах, содержащих квадрат скорости света.

3. Заключение

Наличие вращения сферы приводит к тому, что к радиальной симметрии сферы в формулах для потенциала добавляется симметрия цилиндрического типа относительно оси вращения OZ. Как правило это выражается в том, что скалярный потенциал электромагнитного поля становится зависимым не только от радиуса сферы a, расстояния R и угловой скорости ω, но и от угла θ между осью OZ и направлением на ту точку P, где измеряется потенциал. Последнее подтверждается выражениями для потенциала (32) в средней зоне, (54) в дальней зоне, (79) и (80) в ближней зоне, откуда следует, что потенциал увеличивается по мере того, как радиус-вектор $\mathbf{R}$ точки наблюдения приближается к плоскости экватора вращающейся сферы. По порядку величины относительное изменение потенциала не превышает $\frac{6\omega^2 a^2}{c^2}$, завися от радиуса сферы a и от угловой скорости вращения ω.

Таким образом, для потенциала вращающейся сферы можно ожидать зависимости вида $\varphi = \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 R} F(a, R, \omega, \theta)$, где $F(a, R, \omega, \theta)$ есть некоторая функция. При этом удалённая точка P, где вычисляется потенциал, имеет радиус-вектор $\mathbf{R} = (x, y, z) = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\cos\phi, R\cos\theta)$. Однако вследствие симметрии сферы зависимость от угла ϕ в функции $F(a, R, \omega, \theta)$ и в потенциале φ отсутствует.

Кроме скалярного потенциала, мы вычисляем векторный потенциал в средней зоне (45), в дальней зоне (60), а также в ближней зоне в (85) с учётом (86). Первые члены в компонентах векторного потенциала в (45) содержат в знаменателе c^3, а в (60) аналогичные члены содержат в знаменателе c. Такая смена зависимости потенциала, появляющаяся при переходе от средней зоны к дальней зоне, представляет собой типичное следствие метода запаздывающих потенциалов.

В (45) и в (60) присутствует один и тот член $-\frac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}$, связанный со свойствами релятивистской однородной системы. Однако члены, пропорциональные $\frac{\omega^2 a^2}{c^2}$ и задающие зависимость от угловой скорости ω, имеют различные коэффициенты. Аналогичная ситуация складывается и в ближней зоне для случая $z \approx R > a$, что видно в (87).

Это можно объяснить тем, что в ходе расчётом применялись несовпадающие процедуры разложения функций и их последующего интегрирования, дающие разную точность. Другое возможное объяснение может быть в том, что, действительно, в разных зонах зависимость от ω разная. Улучшить точность полученных результатов можно путём увеличения членов при разложении функций в ряды, однако введение каждого нового члена многократно усложняет расчёты. Заметим, что с целью более удобного аналитического представления результатов в явном виде, некоторые эллиптические интегралы раскладывались в ряды до членов второго и третьего порядков, а другие интегралы раскладывались в ряды вплоть до членов шестого порядка.

Пользуясь найденными выражениями для скалярного и векторного потенциалов, мы вычисляем электрическое и магнитное поля за пределами вращающейся заряженной сферы. Соответствующие выражения для полей представлены в (47) для средней зоны, в

(61) для дальней зоны и в (91) в ближней зоне для $\mathbf{E}$. Формулы для электрического поля $\mathbf{E}$ в ближней зоне уточняются в (92) на оси OZ, при малых z в (93) и при $z=0$, $R \approx a$ в (94). Во всех случаях видно, что поле $\mathbf{E}$ увеличивается за счёт вращения, причём максимальное относительное увеличение не превышает величины $\frac{6\omega^2 a^2}{c^2}$ вблизи поверхности сферы в плоскости XOY.

Компоненты магнитного поля $\mathbf{B}$ в ближней зоне на оси OZ при условии $z \approx R > a$ представлены в (95). Сравнение (47), (61) и (95) показывает, что в рамках используемого подхода полученные приблизительные выражения для $\mathbf{B}$ отличаются в разных зонах в малых членах, связанных с зависимостью от угловой скорости ω, повторяя соответствующее различие для векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Благодаря условию сохранению заряда, заряд q_ω (31) вращающейся сферы равняется заряду q_b неподвижной сферы в (8). Это позволяет приравнять друг к другу фактор Лоренца γ_c движения частиц в центре вращающейся сферы, и аналогичный фактор Лоренца γ'_c для такой же и неподвижной в целом сферы.

Полученные результаты могут быть применены к нуклонам в ядрам атомов при расчётах энергии связи в гравитационной модели сильного взаимодействия, в которой учитывается притяжение нуклонов друг к другу в поле сильной гравитации, отталкивание протонов за счёт электрической силы, отталкивание ориентированных в совместном магнитном поле магнитных моментов нуклонов, а также взаимодействие спиновых гравитационных моментов нуклонов в поле кручения сильной гравитации за счёт собственного вращения нуклонов. Поскольку вблизи экваториальной плоскости у поверхности вращающегося протона электрический потенциал может быть увеличен за счёт добавки порядка $\frac{6\omega^2 a^2}{c^2}$ согласно (80), то это при типичной угловой скорости вращения $\omega = 1{,}03 \times 10^{23}$ рад/с согласно [16] и радиусе протона порядка $8{,}73 \times 10^{-16}$ м увеличивает потенциал в 1,54 раза. В результате это сказывается и на величине энергии связи атомных ядер.

Аналогичный расчёт для нейтронной звезды PSR J1614–2230, у которой угловая скорость вращения $\omega = 1{,}994 \times 10^3$ рад/с и радиус $a = 12{,}8$ км согласно [17], даёт $\frac{\omega a}{c} = 8{,}51 \times 10^{-2}$ и $\frac{6\omega^2 a^2}{c^2} \approx 0{,}04$. Так что если бы эта звезда была заряжена, поле вблизи экватора звезды вероятно так же было бы увеличено в $1+\frac{6\omega^2 a^2}{c^2}\approx 1{,}04$ раза по сравнению с полем не вращающейся звезды. Это же касается и гравитационного поля в ковариантной теории гравитации, уравнения которой подобны уравнениям электромагнитного поля [12].

Ввиду того, что расчёты содержат множество интегралов, основные подробности их вычисления представлены в специальных файлах, являющихся приложением к данной работе [18].

Список использованных источников

1. Olbert S. and Belcher J.W. The Electromagnetic Fields of a Spinning Spherical Shell of Charge. arXiv:1010.1917 , (2010).
2. Jackson, J.D. Classical Electrodynamics, 2nd Edition (John Wiley and Sons, 1975) Chapter 3 and 5.
3. Griffiths D. J. (2007) Introduction to Electrodynamics, 3rd Edition; Prentice Hall - Problem 5.29.
4. Redzic D.V. Electromagnetostatic charges and fields in a rotating conducting sphere. Progress In Electromagnetics Research, Vol. 110, pp. 83-401 (2010). http://dx.doi.org/10.2528/PIER10100504.
5. Gron O. and Voyenli K. Charge distributions in rotating conductors. European Journal of Physics, Vol. 3, Number 4, pp. 210-214 (1982). https://doi.org/10.1088/0143-0807/3/4/004.
6. Marsh J.S. Magnetic and electric fields of rotating charge distributions. American Journal of Physics, Vol. 50, Issue 1, pp. 51-53 (1982). https://doi.org/10.1119/1.13006.
7. Marsh J.S. Magnetic and electric fields of rotating charge distributions II. American Journal of Physics, Vol. 52, Issue 8, pp. 758-759 (1984). https://doi.org/10.1119/1.13852.
8. Fedosin S.G. The Integral Energy-Momentum 4-Vector and Analysis of 4/3 Problem Based on the Pressure Field and Acceleration Field. American Journal of Modern Physics, Vol. 3, No. 4, pp. 152-167 (2014). https://doi.org/10.11648/j.ajmp.20140304.12; Интегральный 4-вектор энергии-импульса и анализ проблемы 4/3 на основе поля давления и поля ускорений.
9. Fedosin S.G. Relativistic Energy and Mass in the Weak Field Limit. Jordan Journal of Physics. Vol. 8, No. 1, pp. 1-16 (2015). http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.889210; Релятивистская энергия и масса в пределе слабого поля.

10. Fedosin S.G. About the cosmological constant, acceleration field, pressure field and energy. Jordan Journal of Physics. Vol. 9, No. 1, pp. 1-30 (2016). http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.889304. // О космологической постоянной, поле ускорения, поле давления и об энергии.

11. Fedosin S.G. The electromagnetic field in the relativistic uniform model. International Journal of Pure and Applied Sciences, Vol. 4, Issue. 2, pp. 110-116 (2018). http://dx.doi.org/10.29132/ijpas.430614. // Электромагнитное поле в релятивистской однородной модели.

12. Fedosin S.G. The Gravitational Field in the Relativistic Uniform Model within the Framework of the Covariant Theory of Gravitation. International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 78, pp. 39-50 (2018). http://dx.doi.org/10.18052/www.scipress.com/ILCPA.78.39. // Гравитационное поле в релятивистской однородной модели в рамках ковариантной теории гравитации.

13. Jefimenko O.D. The effect of radial acceleration on the electric and magnetic fields of circular currents and rotating charges. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 34, No. 31, pp. 6143-6156 (2001). http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/34/31/309.

14. Healy W.P. Comment on ‘The effect of radial acceleration on the electric and magnetic fields of circular currents and rotating charges’. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 35, pp. 2527-2531 (2002). https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/10/403.

15. Fedosin S.G. Equations of Motion in the Theory of Relativistic Vector Fields. International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy, Vol. 83, pp. 12-30 (2019). https://doi.org/10.18052/www.scipress.com/ILCPA.83.12. // Уравнения движения в теории релятивистских векторных полей.

16. Fedosin S.G. The radius of the proton in the self-consistent model. Hadronic Journal, Vol. 35, No. 4, pp. 349-363 (2012). http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.889451. // Радиус протона в самосогласованной модели.

17. Demorest P. B., Pennucci T., Ransom S.M., Roberts M.S.E., Hessels J.W.T. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. Nature. Vol. 467 (7319), pp. 1081-1083 (2010). doi:10.1038/nature09466.

18. Fedosin S.G. Вычисление интегралов и сопутствующие данные. Приложение к статье «Электромагнитное поле за пределами равномерно вращающейся релятивистской однородной системы». [Data set]. Zenodo (2020). https://doi.org/10.5281/zenodo.4308209.

На научный сайт