The Electromagnetic Field of a Rotating Relativistic Uniform System. Chapter 2 in the book: Horizons in World Physics. Volume 306. Edited by Albert Reimer, New York, Nova Science Publishers Inc, pp. 53-128 (2021), ISBN: 978-1-68507-077-9, 978-1-68507-088-5 (e-book). https://doi.org/10.52305/RSRF2992.

Электромагнитное поле вращающейся релятивистской однородной системы

Федосин Сергей Григорьевич
ул. Свиязева 22-79, город Пермь, 614088, Пермский край, Россия
e-mail: fedosin@hotmail.com

Изучаются различные подходы для определения электромагнитного поля в неподвижных и в стационарно вращающихся заряженных телах, имеющих формы цилиндра и сферы. Удобным оказывается сочетание сразу нескольких способов, включая закон Гаусса для электрического поля, решение уравнения Лапласа для потенциалов полей, метод запаздывающих потенциалов, закон Ампера о циркуляции магнитного поля, теорема о циркуляции векторного потенциала. Кроме этого используется разложение компонент поля по цилиндрическому и сферическому базисам, калибровка потенциалов в центре, на поверхности тел, и на бесконечности. При переходе от классической к релятивистской однородной системе применяется способ вычисления внутренних потенциалов поля с помощью калибровочной функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа. Внешний электрический потенциал и напряжённость поля находятся путём разделения переменных с использованием полиномов Лежандра. Разделение переменных для вычисления внешнего векторного потенциала и магнитного поля приводит к необходимости введения новых полиномов, пропорциональных синусу сферического зенитного угла. Вычисляются первые семь таких полиномов, которых достаточно для нахождения векторного потенциала в квадрупольном приближении. В явном виде найдены скалярный и векторный потенциалы, электрическое и магнитное поля внутри и снаружи заряженного цилиндра и сферической системы частиц, находящихся в покое и в состоянии вращения.

Ключевые слова: электромагнитное поле; скалярный потенциал; векторный потенциал; вращение; однородная система: уравнение Лапласа; полиномы.

The electromagnetic field of a rotating relativistic uniform system

Sergey G. Fedosin

PO box 614088, Sviazeva str. 22-79, Perm, Perm Krai, Russia

E-mail: fedosin@hotmail.com

Various approaches to determining the electromagnetic field in stationary and steadily rotating charged bodies in the form of a cylinder and a sphere are studied. It turns out to be convenient to combine several methods at once, including Gauss's law for the electric field, the solution of the Laplace equation for the field potentials, the method of retarded potentials, Ampere's law on the magnetic field circulation, the theorem on the vector potential circulation. In addition, expansion of the field components in terms of cylindrical and spherical bases, gauging of the potentials at the center, on the surface of bodies and at infinity are used. When turning from a classical to a relativistic uniform system, a method is used to calculate the internal field potentials with the help of the gauge function that satisfies the Laplace equation. The external electric potential and the field strength are found by separating variables using Legendre polynomials. Separation of variables for calculating the external vector potential and the magnetic field leads to the need to introduce new polynomials proportional to the sine of the spherical zenith angle. The first seven such polynomials are calculated, which are sufficient to find the vector potential in the quadrupole approximation. The scalar and vector potentials, electric and magnetic fields inside and outside a charged cylinder and a spherical system of particles at rest and in the state of rotation are found in an explicit form.

Keywords: electromagnetic field; scalar potential; vector potential; rotation; uniform system; Laplace equation; polynomials.

1. Введение

По определению, релятивистская однородная система представляет собой сферическую систему частиц, удерживаемую в равновесии собственными гравитационными и электромагнитными силами, с учётом сил от внутреннего поля давления, поля ускорений и других полей, действующих в веществе. Свойства такой системы изучены достаточно хорошо, что позволяет применять её в качестве модели для описания физических явлений и объектов [1-5]. Удобством модели является то, что она позволяет применять релятивистскую теорию поля, отвечающую современным требованиям в точности результатов.

В [6] были вычислены потенциалы поля давления и поля ускорений во вращающейся релятивистской однородной системе. Следующим шагом является нахождение потенциалов электромагнитного поля как внутри, так и за пределами вращающейся системы, которая содержит в себе заряженные частицы. Вращение таких частиц вместе с системой не только изменяет электрическое поле, но и порождает магнитное поле.

Известны работы, в которых вычисляется электромагнитное поле внутри и за пределами вращающейся однородно заряженной либо проводящей сферы [7-13]. Однако особенностью релятивистской однородной системы является то, что в ней учитывается не только внутреннее хаотическое движение частиц, но и пространственное распределение частиц по скоростям движения. Это заметно усложняет расчёты потенциалов полей во вращающейся релятивистской однородной системе, по сравнению с аналогичной покоящейся системой либо по сравнению с вращающейся классической однородной системой.

Согласно [6], потенциалы полей внутри вращающейся системы могут быть найдены путём одновременного расчёта потенциалов для сферы и для цилиндра с последующей калибровкой этих потенциалов. В связи с этим мы будем анализировать электромагнитное поле в этих телах всеми возможными способами с тем, чтобы выработать общий подход к рассматриваемой проблеме.

В частности мы покажем, что наиболее эффективным оказывается вначале расчёт внутреннего скалярного потенциала и электрического поля, а затем решение уравнения Лапласа для внешнего потенциала с использованием полиномов Лежандра, с последующей сшивкой внешнего и внутреннего потенциалов на границе тела. Аналогично, для определения внутреннего векторного потенциала будет использоваться пробное решение, основанное на Лоренцевском преобразовании полей, и дополнительный потенциал. Выражение для векторного потенциала получается после решения уравнения Максвелла с учётом соответствующей калибровки дополнительного потенциала. Внешний векторный потенциал мы будем находить в общем виде путём решения уравнения Лапласа через полиномы специального вида, являющиеся решением соответствующего дифференциального уравнения.

2. Начальные условия

Для напряжённостей и потенциалов электромагнитного поля в рамках специальной теории относительности справедливы уравнения Максвелла:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\gamma\rho_{0q}}{\varepsilon_0},\qquad \nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\gamma\rho_{0q}\mathbf{v}}{\varepsilon_0 c^2},\qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{1}$$

$$\partial_\beta\partial^\beta\varphi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=\frac{\gamma\rho_{0q}}{\varepsilon_0},\qquad \partial_\beta\partial^\beta\mathbf{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{A}=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}. \tag{2}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\qquad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\qquad A_\mu=\left(\frac{\varphi}{c},-\mathbf{A}\right). \tag{3}$$

Напряжённость $\mathbf{E}$ электрического поля, делённая на скорость света c, и магнитное поле $\mathbf{B}$ являются компонентами тензора электромагнитного поля. С помощью соотношений (3) они связаны с 4-потенциалом A_μ, содержащим скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\mathbf{A}$. Величина $\mathbf{j}=\gamma\rho_{0q}\mathbf{v}$ представляет собой плотность зарядового тока, $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ есть фактор Лоренца заряженных частиц, ρ_{0q} – инвариантная плотность заряда частиц, $\mathbf{v}$ – скорость этих частиц. Сочетание (1) и (3) даёт волновые уравнения (2) для потенциалов.

В рассматриваемом нами случае вращения системы с постоянной угловой скоростью функции поля в любой выбранной точке не зависят от времени. Это относится и к потенциалам, так что в (2) временные производные обнуляются. Остаётся следующее:

$$\Delta\varphi=-\frac{\gamma\rho_{0q}}{\varepsilon_0},\qquad \Delta\mathbf{A}=-\frac{\gamma\rho_{0q}}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{v}. \tag{4}$$

Пусть ось вращения проходит через центр сферы и заряженное вещество внутри сферы вращается с некоторой угловой скоростью ω. С помощью правила релятивистского сложения скоростей для абсолютной скорости и фактора Лоренца произвольной частицы в системе отсчёта K, связанной с центром сферы, можно записать:

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{v}'+\frac{(\gamma_r-1)(\mathbf{v}'\mathbf{v}_r)}{v_r^2}\mathbf{v}_r+\gamma_r\mathbf{v}_r}{\gamma_r\left(1+\frac{\mathbf{v}'\mathbf{v}_r}{c^2}\right)},\qquad \gamma=\gamma'\gamma_r\left(1+\frac{\mathbf{v}'\mathbf{v}_r}{c^2}\right), \tag{5}$$

где $\mathbf{v}'$ есть скорость хаотического движения частицы в системе отсчёта K', вращающейся вместе с веществом с угловой скоростью ω ; $\mathbf{v}_r$ – линейная скорость движения системы отсчёта K' в месте расположения частицы, возникающая за счёт вращения в системе отсчёта K; $\gamma_r = \dfrac{1}{\sqrt{1-v_r^2/c^2}}$ – фактор Лоренца для скорости $\mathbf{v}_r$, $\gamma' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}$ – фактор Лоренца для скорости $\mathbf{v}'$.

Стандартный подход требует, чтобы в уравнениях поля использовались величины, характеризующие типичные частицы вещества. Следовательно, мгновенные значения в (5) следует заменить на усреднённые значения по объёму в небольшой окрестности вокруг рассматриваемой точки так, чтобы в этом объёме присутствовало достаточное количество частиц. Учитывая, что скорость $\mathbf{v}'$ хаотического движения у соседних частиц направлена в разные стороны, в первом приближении имеем: $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_r$, $\overline{\gamma} = \gamma'\gamma_r$. Подставляя в (4) усреднённые значения, имеем для вращающейся сферы:

$$\Delta\varphi = -\frac{\gamma'\gamma_r\,\rho_{0q}}{\varepsilon_0}, \qquad \Delta\mathbf{A} = -\frac{\gamma'\gamma_r\,\rho_{0q}}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{v}_r. \tag{6}$$

3. Электрическое поле в отсутствие общего вращения, частные случаи

3.1. Сферическая система с учётом хаотического движения частиц

Пусть в (6) $\gamma_r = 1$ и вещество в рассматриваемой системе не вращается. В этом случае угловая скорость $\omega = 0$, так что фактор Лоренца зависит лишь от текущего радиуса r и от величины фактора Лоренца γ'_c в центре сферы [14]:

$$\gamma'(\omega=0) = \frac{c\gamma'_c}{r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) \approx \gamma'_c - \frac{2\pi\eta\rho_0 r^2\gamma'_c}{3c^2}, \tag{7}$$

где η есть коэффициент поля ускорений, ρ_0 – инвариантная плотность массы частиц.

С учётом (7) решение уравнения (6) для скалярного потенциала в веществе внутри сферы с радиусом a согласно [15] имеет следующий вид:

$$\varphi_i(\omega=0)=\frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c'}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-r\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]\approx$$
$$\approx\frac{\rho_{0q}\gamma_c'(3a^2-r^2)}{6\varepsilon_0}, \tag{8}$$

при этом векторный потенциал равен нулю: $\mathbf{A}_i(\omega=0)=0$. Здесь и далее индекс i обозначает, что физическая величина определяется в веществе.

Подстановка данных потенциалов в (3) даёт возможность вычислить электрическое поле внутри сферы:

$$\mathbf{E}_i(\omega=0)=\frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c'}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r^2}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-r\cos\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]\mathbf{e}_r\approx$$
$$\approx\frac{\rho_{0q}\gamma_c' r}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{2\pi\eta\rho_0 r^2}{5c^2}\right)\mathbf{e}_r. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{e}_r=\frac{\mathbf{r}}{r}$ есть единичный вектор сферической системы отсчёта.

Магнитное поле равно нулю: $\mathbf{B}_i(\omega=0)=0$, как и векторный потенциал.

Полный заряд сферы определяется интегралом по объёму сферы:

$$q_b=\rho_{0q}\int\gamma'(\omega=0)dV_s=\frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c'}{\eta\rho_0}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-a\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]\approx$$
$$\approx q\gamma_c'\left(1-\frac{3\eta m}{10ac^2}\right). \tag{10}$$

Здесь $q=\frac{4\pi\rho_{0q}a^3}{3}$, $m=\frac{4\pi\rho_0 a^3}{3}$. С учётом (10) скалярный потенциал и электрическое поле за пределами сферы равны:

$$\varphi_o(\omega=0)=\frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 r}\approx\frac{q\gamma_c'}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{3\eta m}{10ac^2}\right).$$

$$\mathbf{E}_o\left(\omega=0\right)=\frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r\approx\frac{q\gamma_c'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1-\frac{3\eta m}{10ac^2}\right)\mathbf{e}_r\,. \tag{11}$$

Здесь и далее индекс o показывает, что физическая величина определяется за пределами вещества. Для векторного потенциала и магнитного поля в этом случае имеем: $\mathbf{A}_o\left(\omega=0\right)=0$, $\mathbf{B}_o\left(\omega=0\right)=0$.

3.2. Неподвижная цилиндрическая система частиц в пределе твёрдого тела

Пусть имеется неподвижное бесконечно длинное цилиндрическое твёрдое тело. Тогда в (4) $\gamma=1$ и для потенциала внутри цилиндра можно записать уравнение:

$$\Delta\varphi_{ir}\left(\omega=0\right)=-\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0}\,. \tag{12}$$

Лапласиан произвольной функции $f=f(\rho,\phi,z)$ в цилиндрических координатах представляется так:

$$\Delta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \tag{13}$$

Очевидно, что для бесконечно длинного цилиндра потенциал зависит только от переменной ρ, представляющей собой расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения. Из (12) и (13) следует тогда уравнение для потенциала внутри цилиндра и решение этого уравнения:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi_{ir}\left(\omega=0\right)}{\partial\rho}\right)=-\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0}\,,\qquad \varphi_{ir}\left(\omega=0\right)=-\frac{\rho_{0q}\rho^2}{4\varepsilon_0}+C_1\ln\rho+C_2\,. \tag{14}$$

Внутри цилиндра потенциал $\varphi_{ir}\left(\omega=0\right)$ не может быть бесконечным на оси цилиндра при $\rho=0$, поэтому следует положить постоянную C_1 равной нулю. Потенциал становится равным:

$$\varphi_{ir}\left(\omega=0\right)=-\frac{\rho_{0q}\,\rho^2}{4\varepsilon_0}+C_2. \tag{15}$$

За пределами неподвижного цилиндра нет вещества, $\rho_{0q}=0$, и вместо (14) для потенциала получается:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\varphi_{or}\left(\omega=0\right)}{\partial\rho}\right]=0, \qquad \varphi_{or}\left(\omega=0\right)=C_3\ln\rho+C_4.$$

В выражении для потенциала $\varphi_{or}\left(\omega=0\right)$ присутствует логарифм $\ln\rho$. Как правило, выражения под знаком логарифмов следует представлять в безразмерном виде. В связи с этим в выражении для потенциала положим, что $C_4=-C_3\ln a+C_5$, где a есть радиус цилиндра. Это даёт следующее:

$$\varphi_{or}\left(\omega=0\right)=C_3\ln\frac{\rho}{a}+C_5. \tag{16}$$

Для нахождения коэффициента C_3 найдём электрическое поле $\mathbf{E}_{or}\left(\omega=0\right)$ за пределами цилиндра.

В цилиндрических координатах ρ,ϕ,z градиент произвольной функции $f\left(\rho,\phi,z\right)$ равен:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z. \tag{17}$$

Единичные векторы $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ и $\mathbf{e}_z$ в (17) образуют правую тройку векторов прямоугольной цилиндрической системы координат.

Для неподвижного цилиндра векторный потенциал $\mathbf{A}_{or}\left(\omega=0\right)$ за пределами цилиндра равен нулю. Согласно (3) с учётом (16-17) тогда будет:

$$\mathbf{E}_{or}\left(\omega=0\right)=-\nabla\varphi_{or}\left(\omega=0\right)=-\frac{\partial\varphi_{or}\left(\omega=0\right)}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho=-\frac{C_3}{\rho}\mathbf{e}_\rho. \tag{18}$$

Аналогично, для электрического поля внутри цилиндра из (3), (15) и (17) находим:

$$\mathbf{E}_{ir}\left(\omega=0\right)=-\nabla\varphi_{ir}\left(\omega=0\right)=-\frac{\partial\varphi_{ir}\left(\omega=0\right)}{\partial\rho}\mathbf{e}_{\rho}=\frac{\rho_{0q}\,\rho}{2\varepsilon_0}\mathbf{e}_{\rho}\,. \tag{19}$$

На оси цилиндра при $\rho=0$ напряжённость поля $\mathbf{E}_{ir}\left(\omega=0\right)$ обращается в нуль. Так как напряжённость поля определяется как электрическая сила, отнесённая к единице заряда, то действующая на единичный заряд на оси цилиндра сила равна нулю. Это видно и из симметрии задачи, если просуммировать силы от всех зарядов вещества цилиндра, действующие на некоторый единичный заряд на оси цилиндра. Можно заметить, что если бы в (14) постоянная C_1 не равнялась нулю, то вместо (19) было бы

$$\mathbf{E}_{ir}\left(\omega=0\right)=\frac{\rho_{0q}\,\rho}{2\varepsilon_0}\mathbf{e}_{\rho}-\frac{C_1}{\rho}\mathbf{e}_{\rho},$$

что давало бы физически необоснованное бесконечное значение для $\mathbf{E}_{ir}\left(\omega=0\right)$ при $\rho=0$.

Таким образом, внутри бесконечно длинного цилиндра с однородной плотностью заряда ρ_{0q} электрическое поле (19) везде направлено перпендикулярно оси вращения, в сторону нарастания координаты ρ, определяемой единичным вектором $\mathbf{e}_{\rho}$.

Чтобы найти постоянную C_3 в (18), применим закон Гаусса в интегральной форме [16]:

$$\oint\limits_{S_k} F^{0k}\sqrt{-g}\;dS_k=-\frac{\Phi_E}{c}=-\mu_0\int\limits_V \rho_{0q}u^0\sqrt{-g}\;dx^1dx^2dx^3\;. \tag{20}$$

Здесь F^{0k} обозначают временные компоненты электромагнитного тензора; g есть детерминант метрического тензора; $dS_k=dS^{ij}=dx^i dx^j$ есть ортонормированный элемент замкнутой двумерной поверхности, окружающей заряженный объём;

$\Phi_E = c\oint\limits_{S_k} F^{k0}\sqrt{-g}\, dS_k$ представляет собой поток электромагнитного поля через данную поверхность; трёхмерные индексы $i, j, k = 1, 2, 3$ и не совпадают друг с другом.

В рамках специальной теории относительности в декартовых координатах компоненты тензора F^{00}, F^{10}, F^{20}, F^{30} равны соответственно 0, $\frac{E_x}{c}$, $\frac{E_y}{c}$, $\frac{E_z}{c}$. При этом будет $g = -1$, временная компонента 4-скорости движущегося заряженного вещества $u^0 = c\gamma$, а элемент движущегося объёма равен $dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{dV_c}{\gamma}$, где γ есть фактор Лоренца вещества, dV_c обозначает элемент объёма неподвижного цилиндра. Для неподвижного в целом вещества в отсутствие движения или вращения $\gamma = 1$.

Пусть поверхность интегрирования S представляет собой неподвижную цилиндрическую поверхность с очень большой, практически бесконечной длиной L и координатой $\rho \geq a$, внутри которой соосно расположен неподвижный однородно заряженный цилиндр радиуса a. Поток Φ_E электрического поля вычисляется по поверхности S, при этом важна только компонента поля $E_{or\rho}$, направленная вдоль цилиндрической координаты ρ, так как вкладом других компонент поля на торцах бесконечно длинной цилиндрической поверхности S можно пренебречь.

В правой части (20) плотность заряда ρ_{0q} равна нулю за пределами заряженного цилиндра, поэтому интеграл по объёму берётся только по этому цилиндру в пределах длины L внутри поверхности S. Из (20) учётом соотношения $c^2\mu_0\varepsilon_0 = 1$ следует:

$$\frac{2\pi\rho L E_{or\rho}}{c} = c\mu_0\rho_{0q}\pi a^2 L, \qquad E_{or\rho} = \frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0\rho}.$$

Сравнивая последнее выражение с (18), находим C_3, затем уточняем потенциал в (16) и напряжённость поля в (18):

$$C_3 = -\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0}, \qquad \varphi_{or}(\omega = 0) = -\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a} + C_5. \tag{21}$$

$$\mathbf{E}_{or}\left(\omega=0\right)=\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0\rho}\mathbf{e}_\rho\,. \tag{22}$$

Выражение для C_3 в (21) можно получить и непосредственно из (18) и (19), приравняв $\mathbf{E}_{or}\left(\omega=0\right)$ к $\mathbf{E}_{ir}\left(\omega=0\right)$ при $\rho=a$, то есть на поверхности цилиндра.

Согласно (21-22), внешнее электрическое поле неподвижного цилиндра уменьшается обратно пропорционально расстоянию ρ до оси цилиндра, а потенциал на бесконечности логарифмически уменьшается с ростом ρ.

На поверхности цилиндра при $\rho=a$ потенциалы (15) и (21) должны равняться друг другу. Это даёт связь между коэффициентами C_2 и C_5, и позволяет выразить $\varphi_{or}\left(\omega=0\right)$ через C_2:

$$C_5=-\frac{\rho_{0q}a^2}{4\varepsilon_0}+C_2\,.$$

$$\varphi_{or}\left(\omega=0\right)=-\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a}-\frac{\rho_{0q}a^2}{4\varepsilon_0}+C_2\,. \tag{23}$$

3.3. Неподвижная сфера в пределе твёрдого тела

Чтобы понять, как действовать дальше, рассмотрим случай твёрдой однородной сферы радиуса a. В сферических координатах для произвольной функции $f=f(r,\theta,\phi)$ лапласиан этой функции для случая $r\neq 0$ имеет вид:

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,f)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\,. \tag{24}$$

Потенциал φ_{os} за пределами неподвижной сферы зависит только от радиальной координаты r. Поскольку за пределами сферы $\rho_{0q}=0$, из (4) и (24) следует:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\varphi_{os}\left(\omega=0\right)\right]=0\,,\qquad \varphi_{os}\left(\omega=0\right)=\frac{C_7}{r}+C_6\,. \tag{25}$$

В стандартной калибровке потенциала принимается, что на бесконечности потенциал сферы равняется нулю, так что $C_6 = 0$.

В сферических координатах r, θ, ϕ градиент произвольной функции $f(r, \theta, \phi)$ равен:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi . \tag{26}$$

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ в (3) для неподвижной сферы равен нулю, так что для напряжённости внешнего поля с учётом (25-26) имеем:

$$\mathbf{E}_{os}(\omega = 0) = -\nabla\varphi_{os}(\omega = 0) = -\frac{\partial\varphi_{os}(\omega = 0)}{\partial r}\mathbf{e}_r = \frac{C_7}{r^2}\mathbf{e}_r , \tag{27}$$

где $\mathbf{e}_r$ есть единичный вектор вдоль радиальной координаты r.

Окружим заряженную сферу радиуса a сферической поверхностью S радиуса $r \geq a$ и применим теорему Гаусса (20). Это с учётом соотношения $c^2\mu_0\varepsilon_0 = 1$ даёт следующее:

$$\frac{4\pi r^2 E_{osr}}{c} = \frac{4\pi c\mu_0\rho_{0q}a^3}{3}, \qquad E_{osr} = \frac{\rho_{0q}a^3}{3\varepsilon_0 r^2} .$$

Сравнение с (27) позволяет найти C_7 и уточнить выражения для потенциала (25) и напряжённости поля за пределами сферы с учётом соотношения $C_6 = 0$:

$$C_7 = \frac{\rho_{0q}a^3}{3\varepsilon_0}, \qquad \varphi_{os}(\omega = 0) = \frac{\rho_{0q}a^3}{3\varepsilon_0 r}, \qquad \mathbf{E}_{os}(\omega = 0) = \frac{\rho_{0q}a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r . \tag{28}$$

Внутри неподвижной сферы с помощью (4) и (24), при условии равенства нулю фактора Лоренца в виде $\gamma = 0$, находим уравнение для потенциала и его решение:

$$\Delta\varphi_{is}(\omega = 0) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\varphi_{is}(\omega = 0)\right] = -\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0}, \qquad \varphi_{is}(\omega = 0) = -\frac{\rho_{0q}r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{C_9}{r} + C_8 .$$

Постоянная C_9 должна равняться нулю для того, чтобы потенциал не был бесконечным при $r=0$. Постоянная C_8 находится из условия равенства внутреннего потенциала $\varphi_{is}(\omega=0)$ и внешнего потенциала $\varphi_{os}(\omega=0)$ из (28) на поверхности сферы при $r=a$. Это позволяет уточнить потенциал внутри сферы и с помощью (3) найти напряжённость поля:

$$-\frac{\rho_{0q}a^2}{6\varepsilon_0}+C_8=\frac{\rho_{0q}a^2}{3\varepsilon_0}, \qquad C_8=\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0}.$$

$$\varphi_{is}(\omega=0)=\frac{\rho_{0q}\left(3a^2-r^2\right)}{6\varepsilon_0},$$

$$\mathbf{E}_{is}(\omega=0)=-\nabla\varphi_{is}(\omega=0)=-\frac{\partial\varphi_{is}(\omega=0)}{\partial r}\mathbf{e}_r=\frac{\rho_{0q}r}{3\varepsilon_0}\mathbf{e}_r. \tag{29}$$

Сравнение (19) и (29) показывает, что при $r=\rho$, то есть в плоскости экватора сферы, электрическое поле внутри цилиндра в полтора раза больше, чем внутри сферы того же радиуса. Исходя из подобия (19) и (29), имеющего место несмотря на различие форм цилиндра и сферы, следует ожидать, что и потенциалы внутри цилиндра и сферы должны вести себя подобно. Так как в (29) потенциал $\varphi_{is}(\omega=0)$ внутри сферы везде положителен, будем считать потенциал внутри цилиндра так же положительным, $\varphi_{ir}(\omega=0)>0$. Беря максимальное значение $\rho=a$, из (15) тогда следует условие для постоянной: $C_2>\frac{\rho_{0q}a^2}{4\varepsilon_0}$. Из (23) соответственно следует, что $C_5>0$.

4. Электрическое поле при наличии общего вращения, частные случаи

4.1. Цилиндр в пределе твёрдого тела

Пусть бесконечно длинный цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω. В сферических координатах r,θ,ϕ амплитуда линейной скорости вращения выражается формулой: $v_r=\omega r\sin\theta$, где угол θ отсчитывается от оси вращения OZ, а частицы вещества вращаются в плоскостях, параллельных плоскости XOY. В цилиндрических координатах ρ,ϕ,z скорость определяется выражением $v_r=\omega\rho$.

Соответственно, фактор Лоренца можно записать так:

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - v_r^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2 \sin^2\theta/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 \rho^2/c^2}}, \tag{30}$$

где ρ есть расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки внутри цилиндра.

Положим для скалярного потенциала в (6) $\gamma' = 1$ и учтём (30):

$$\Delta\varphi_{ir} = -\frac{\gamma_r \rho_{0q}}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0\sqrt{1 - v_r^2/c^2}} = -\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0\sqrt{1 - \omega^2 \rho^2/c^2}}. \tag{31}$$

В (31) потенциал φ_{ir} внутри бесконечно длинного цилиндра зависит только от ρ, так что с учётом (13) получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi_{ir}}{\partial\rho}\right) = -\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0\sqrt{1 - \omega^2 \rho^2/c^2}}.$$

Решение данного уравнения можно записать так:

$$\varphi_{ir} = \frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}\sqrt{1 - \omega^2\rho^2/c^2} - \frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}\ln\left(1 + \sqrt{1 - \omega^2\rho^2/c^2}\right) +$$
$$+\frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}\left(\ln\frac{\omega}{c} + \ln\rho\right) + C_{10}\ln\rho + C_{11}.$$

Так как $\omega = const$, постоянную C_{11} можно представить в виде $C_{11} = C_{12} - \frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}\ln\frac{\omega}{c}$.

Если ещё положить $\frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2} + C_{10} = 0$, то φ_{ir} не будет зависеть от величины $\ln\rho$, которая обращается в бесконечность при $\rho = 0$. С учётом этого имеем:

$$\varphi_{ir} = \frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}\sqrt{1 - \omega^2\rho^2/c^2} - \frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}\ln\left(1 + \sqrt{1 - \omega^2\rho^2/c^2}\right) + C_{12}. \tag{32}$$

Поскольку векторный потенциал $\mathbf{A}_{ir}$ внутри вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра не зависит от времени, то из (3) следует, что электрическое поле определяется формулой $\mathbf{E}_{ir} = -\nabla\varphi_{ir}$. Из (32) и (17) тогда находим, что

$$\mathbf{E}_{ir} = -\frac{\partial\varphi_{ir}}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho = \frac{\rho_{0q}\rho}{\varepsilon_0\left(1+\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}\right)}\mathbf{e}_\rho \,. \tag{33}$$

Когда угловая скорость вращения ω становится равной нулю, поле $\mathbf{E}_{ir}$ в (33) переходит в поле $\mathbf{E}_{ir}\left(\omega=0\right)$ неподвижного цилиндра, найденное в (19).

По мере роста угловой скорости вращения поле $\mathbf{E}_{ir}$ растёт и в предельном случае при $\omega\rho = c$ достигает величины: $\left(\mathbf{E}_{ir}\right)_{\max} = \frac{\rho_{0q}\rho}{\varepsilon_0}\mathbf{e}_\rho = 2\mathbf{E}_{ir}\left(\omega=0\right)$.

За пределами цилиндра плотность заряда $\rho_{0q} = 0$ и вместо (31) с учётом (13) для потенциала внешнего электрического поля получается уравнение Лапласа и его соответствующее решение:

$$\Delta\varphi_{or} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi_{or}}{\partial\rho}\right) = 0\,, \qquad \varphi_{or} = C_{13}\ln\rho + C_{14}\,. \tag{34}$$

Электрическое поле можно найти по формуле $\mathbf{E}_{or} = -\nabla\varphi_{or}$, откуда с учётом (17) следует:

$$\mathbf{E}_{or} = -\frac{\partial\varphi_{or}}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho = -\frac{C_{13}}{\rho}\mathbf{e}_\rho\,.$$

Чтобы найти постоянную C_{13}, применим закон Гаусса (20) аналогично тому, как это было сделано для случая неподвижного цилиндра. Так как потенциал зависит только от ρ, то электрическое поле вокруг бесконечно длинного цилиндра независимо от состояния его покоя или постоянного вращения направлено перпендикулярно оси

цилиндра, а полный заряд цилиндра остаётся неизменен. Вследствие этого C_{13} будет равняться C_3 в (18) и в (21):

$$C_{13} = C_3 = -\frac{\rho_{0q} a^2}{2\varepsilon_0}.$$

Для внешнего поля можно тогда записать:

$$\mathbf{E}_{or} = \frac{\rho_{0q} a^2}{2\varepsilon_0 \rho} \mathbf{e}_\rho . \tag{35}$$

В объёме цилиндра, определяемом длиной L, содержится заряд $q = \pi a^2 L \rho_{0q}$. Если этот заряд целиком переместить на поверхность рассматриваемого объёма, появляется поверхностная плотность заряда, равная $\sigma = \frac{q}{2\pi a L} = \frac{\rho_{0q} a}{2}$. От подобной перестановки заряда внешнее поле вращающегося цилиндра не меняется и запишется так:

$$\mathbf{E}_{or} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 \rho} \mathbf{e}_\rho .$$

Поле в таком виде можно найти в [12, Eq. (8)].

Если выбрать постоянную C_{14} в виде $C_{14} = C_{15} - C_{13} \ln a$, то (34) преобразуется так:

$$\varphi_{or} = -\frac{\rho_{0q} a^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{\rho}{a} + C_{15} . \tag{36}$$

Внешнее электрическое поле (35) вращающегося твёрдого цилиндра не зависит от угловой скорости вращения ω, при этом поле (35) совпадает с внешним полем (22) неподвижного цилиндра.

При $\rho = a$, то есть на поверхности цилиндра, потенциалы φ_{ir} в (32) и φ_{or} в (36) должны совпасть друг с другом. Это даёт связь между постоянными C_{12} и C_{15}:

$$\frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\,\omega^2}\sqrt{1-\omega^2 a^2/c^2}-\frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\,\omega^2}\ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2 a^2/c^2}\right)+C_{12}=C_{15}\,. \qquad (37)$$

4.2. Внутреннее поле сферической системы частиц

При вращении сферы относительно системы отсчёта K вращается и система отсчёта K', связанная с вращающимся веществом сферы. Мы предполагаем, что в K' фактор Лоренца имеет тот же вид, что и в (7) для случая неподвижной сферы:

$$\gamma'=\frac{c\gamma_c}{r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\approx\gamma_c-\frac{2\pi\eta\rho_0 r^2\gamma_c}{3c^2}\,, \qquad (38)$$

с тем отличием, то вместо γ'_c мы используем фактор Лоренца в центре вращающейся сферы γ_c. Соотношение (38) предполагает учёт собственного хаотического движения частиц в рамках релятивистской однородной системы.

Вследствие вращения в системе отсчёта K с учётом релятивистских эффектов плотность заряда вещества становится равной $\rho_{0q}\overline{\gamma}=\rho_{0q}\gamma'\gamma_r$, при этом элемент вращающегося объёма уменьшается до величины $\frac{dV_s}{\gamma_r}$. Для полного заряда вращающейся сферы имеем:

$$q_\omega=\rho_{0q}\int\gamma'\gamma_r\frac{dV_s}{\gamma_r}=\frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c}{\eta\rho_0}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-a\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]\approx$$
$$\approx q\gamma_c\left(1-\frac{3\eta m}{10ac^2}\right). \qquad (39)$$

Так как заряд сферы не должен зависеть от состояния движения сферы, то заряд q_b в (10) должен равняться заряду q_ω в (39). Отсюда находим, что $\gamma'_c=\gamma_c$, и вращение не меняет значение фактора Лоренца в центре сферы. Равенство $\gamma'_c=\gamma_c$ было найдено также в [6].

Перейдём теперь к вопросу определения внутреннего потенциала, для чего используем подход, развитый в [6]. Подстановка (38) и (30) в (6) даёт:

$$\Delta\varphi_i = -\frac{\gamma'\gamma_r\,\rho_{0q}}{\varepsilon_0} = -\frac{c\rho_{0q}\,\gamma_c}{\varepsilon_0 r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right). \tag{40}$$

Движущаяся прямолинейно точечная заряженная частица согласно [17] имеет потенциал вида $\varphi_p = \gamma_p\varphi_{p0}$, где γ_p есть фактор Лоренца частицы, φ_{p0} представляет собой потенциал в системе отсчёта, связанной с частицей. Действуя по аналогии, возьмём вместо φ_{p0} потенциал внутри неподвижной сферы $\varphi_i(\omega=0)$ из (8), а вместо γ_p фактор Лоренца γ_r из (30). Тогда с учётом найденного выше соотношения $\gamma'_c = \gamma_c$ потенциал

$$\begin{aligned}\varphi_i^* &= \gamma_r\,\varphi_i(\omega=0) = \\ &= \frac{c^2\rho_{0q}\,\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - r\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]\end{aligned} \tag{41}$$

можно рассматривать как первое приближение для потенциала внутри вращающейся сферы.

Найдём лапласиан $\Delta\varphi_i^*$ вначале в декартовых координатах, а затем заменим эти координаты через радиальную координату r и цилиндрическую координату ρ:

$$\Delta\varphi_i^* = -\frac{c\rho_{0q}\,\gamma_c}{\varepsilon_0\, r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)+$$

$$+\frac{c\omega^2\rho_{0q}\,\gamma_c\left(1+\dfrac{\omega^2\rho^2}{2c^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\, r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{5/2}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)+$$

$$+\frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2\rho^2}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\, r^2\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\cos\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-$$

$$-\frac{c\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2\rho^2}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\, r^3\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-$$

$$-\frac{\omega^2\rho_{0q}\,\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-$$

$$-\frac{3\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^4\rho^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{5/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right). \tag{42}$$

Преобразуем второй член в правой части (42). В результате преобразования появляется новый член, содержащий c^2 в знаменателе. В этом члене можно положить, что $\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\approx\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}$:

$$\frac{c\omega^2\rho_{0q}\,\gamma_c\left(1+\dfrac{\omega^2\rho^2}{2c^2}\right)\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\, r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{5/2}}\approx\frac{c\omega^2\rho_{0q}\,\gamma_c\left(1+\dfrac{3\omega^2\rho^2}{c^2}\right)}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\, r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\approx$$

$$\approx\frac{c\,\omega^2\rho_{0q}\,\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\, r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)+\frac{3\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^4\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0}.$$

В третьем и четвёртом членах в правой части (42) разложим косинус и синус по правилам $\cos\delta\approx 1-\frac{\delta^2}{2}+\ldots,\ \sin\delta\approx\delta-\frac{\delta^3}{6}+\ldots$:

$$\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r^2\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\cos\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-$$
$$-\frac{c\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\,r^3\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\approx-\frac{2\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{3\varepsilon_0 c^2}.$$

Учтём данные соотношения в (42) и используем (40):

$$\Delta\varphi_i^*\approx\Delta\varphi_i+\frac{c\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)+$$
$$+\frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0}-\frac{2\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{3\varepsilon_0 c^2}-\frac{\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-$$
$$-\frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{5/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right).\tag{43}$$

Заметим, что мы находили $\Delta\varphi_i^*$ в (43) путём упрощения (42), и в ходе расчётов всегда оставляли только те члены, которые содержат в знаменателе c^2, убирая остальные малые члены, содержащие c^4, c^6 и так далее. Будем считать, что $\varphi_i^*-\varphi_i=\varphi_1$, и подставим это соотношение в (43), что приводит к уравнению для определения φ_1:

$$\Delta\varphi_1\approx\frac{c\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)+\frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0}-\frac{2\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{3\varepsilon_0 c^2}-$$
$$-\frac{\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-$$
$$-\frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{5/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right).$$

В правой части данного уравнения первый член зависит только от r, а остальные члены зависят только от ρ. Поэтому можно положить, что $\varphi_1=\varphi_2(r)+\varphi_3(\rho)$, причём

$$\Delta\varphi_2(r)=\frac{c\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right).$$

$$\Delta\varphi_3(\rho) \approx \frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^2}{2\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0} - \frac{2\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{3\varepsilon_0 c^2} - \frac{\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) -$$
$$-\frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{5/2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right).$$

Учтём (24) для решения уравнения, содержащего $\Delta\varphi_2(r)$, и (13) для решения уравнения, содержащего $\Delta\varphi_3(\rho)$. Это даёт:

$$\varphi_2(r) = -\frac{c^3\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{8\pi^2\varepsilon_0\eta^2\rho_0^2\, r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) + C_{16} + \frac{C_{17}}{r}.$$

$$\varphi_3(\rho) \approx \frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} - \frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) +$$
$$+C_{18}\ln\rho + C_{19}.$$

Константы C_{17} и C_{18} следует положить равными нулю, чтобы при $r=0$ и $\rho=0$ не возникало бесконечностей. После определения $\varphi_2(r)$ и $\varphi_3(\rho)$ находится и потенциал $\varphi_1 = \varphi_2(r) + \varphi_3(\rho)$. Обозначим $C_{16} + C_{19} = C_{20}$, тогда имеем:

$$\varphi_1 \approx -\frac{c^3\omega^2\rho_{0q}\gamma_c}{8\pi^2\varepsilon_0\eta^2\rho_0^2\, r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) + \frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} -$$
$$-\frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}}\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) + C_{20}.$$

Вспоминая, что $\varphi_1 = \varphi_i^* - \varphi_i$, где φ_i^* определено в (41), находим приблизительную величину потенциала:

$$\varphi_i \approx \frac{c^3\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}} + \frac{\omega^2}{2\pi\eta\rho_0}\right]\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) -$$
$$-\frac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^4\rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2\eta\rho_0} + \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} - C_{20}.$$

Обозначим $C_{20} = C_{21}(\omega) + C_{22}$, где постоянная $C_{21}(\omega)$ прямо пропорциональна угловой скорости вращения ω и обращается в нуль при $\omega = 0$, а постоянная C_{22} не зависит от ω:

$$\varphi_i \approx \frac{c^3 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0 r \sqrt{4\pi\eta\rho_0}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}} + \frac{\omega^2}{2\pi\eta\rho_0} \right] \sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right) -$$
$$- \frac{3\rho_{0q}\gamma_c \omega^4 \rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2 \eta \rho_0} + \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} - C_{21}(\omega) - C_{22}.$$

Положим теперь $\omega = 0$ в потенциале φ_i и сравним результат с (8) для потенциала не вращающейся сферы с учётом соотношения $\gamma_c = \gamma_c'$, вытекающего из (39) в сравнении с (10). Это даёт выражение для постоянной C_{22} и позволяет уточнить φ_i:

$$C_{22} = \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} \cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right).$$

$$\varphi_i \approx \frac{c^3 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0 r \sqrt{4\pi\eta\rho_0}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}} + \frac{\omega^2}{2\pi\eta\rho_0} \right] \sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right) -$$
$$- \frac{3\rho_{0q}\gamma_c \omega^4 \rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2 \eta \rho_0} + \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} - C_{21}(\omega) - \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} \cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right). \quad (44)$$

При малых r и ρ, то есть вблизи центра сферы, в (44) можно заменить синус на его аргумент:

$$\varphi_i(r \approx 0) \approx \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}} + \frac{\omega^2}{2\pi\eta\rho_0} \right] - \frac{3\rho_{0q}\gamma_c \omega^4 \rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2 \eta \rho_0} +$$
$$+ \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} - C_{21}(\omega) - \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} \cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right). \quad (45)$$

В (32) был найден потенциал φ_{ir} внутри вращающегося цилиндра. Откалибруем потенциал $\varphi_i(r \approx 0)$ в центре вращающейся сферы таким образом, чтобы он с точностью

до некоторой константы C_{23} совпал с потенциалом в центре цилиндра. Для этого в (32) положим $\rho = 0$, добавим C_{23} и результат приравняем к (45) при $\rho = 0$, $r = 0$. Это позволяет выразить C_{12} и уточнить вид потенциала φ_{ir} для цилиндра:

$$C_{12} = \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi \varepsilon_0 \eta \rho_0} + \frac{c^2 \omega^2 \rho_{0q} \gamma_c}{8\pi^2 \varepsilon_0 \eta^2 \rho_0^2} - \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi \varepsilon_0 \eta \rho_0} \cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi \eta \rho_0}\right) +$$
$$+ \frac{c^2 \rho_{0q}}{\varepsilon_0 \omega^2} \ln 2 - \frac{c^2 \rho_{0q}}{\varepsilon_0 \omega^2} - C_{21}(\omega) - C_{23}.$$

$$\varphi_{ir} = \frac{c^2 \rho_{0q}}{\varepsilon_0 \omega^2}\left[\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2} - \ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}\right) - 1 + \ln 2\right] + \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi \varepsilon_0 \eta \rho_0} + \frac{c^2 \omega^2 \rho_{0q} \gamma_c}{8\pi^2 \varepsilon_0 \eta^2 \rho_0^2} -$$
$$- \frac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi \varepsilon_0 \eta \rho_0} \cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi \eta \rho_0}\right) - C_{21}(\omega) - C_{23}$$

В первом приближении можно считать, что потенциал на оси цилиндра при $\rho = 0$ не зависит от угловой скорости вращения ω. Мы покажем справедливость этого утверждения в следующем разделе. В таком случае можно положить, что C_{23} не зависит от ω, и тогда должно быть $C_{21}(\omega) = \dfrac{c^2 \omega^2 \rho_{0q} \gamma_c}{8\pi^2 \varepsilon_0 \eta^2 \rho_0^2}$. Отсюда для φ_{ir} при выборе условия для постоянных в виде $\dfrac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi \varepsilon_0 \eta \rho_0} - \dfrac{c^2 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi \varepsilon_0 \eta \rho_0} \cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi \eta \rho_0}\right) - C_{23} = C_{24}$ имеем:

$$\varphi_{ir} = \frac{c^2 \rho_{0q}}{\varepsilon_0 \omega^2}\left[\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2} - \ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}\right) - 1 + \ln 2\right] + C_{24}. \qquad (46)$$

В свою очередь, потенциал φ_i в (44) может быть уточнён с учётом соотношения $C_{21}(\omega) = \dfrac{c^2 \omega^2 \rho_{0q} \gamma_c}{8\pi^2 \varepsilon_0 \eta^2 \rho_0^2}$. Кроме этого, нам следует произвести калибровку потенциала φ_i путём добавления к φ_i калибровочной функции K_i такой, что лапласиан этой функции обращается в нуль: $\Delta K_i = 0$. В этом случае уравнение (40) для потенциала φ_i не изменится. Всё это даёт следующее:

$$\varphi_i \approx \frac{c^3 \rho_{0q} \gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0 r \sqrt{4\pi\eta\rho_0}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}} + \frac{\omega^2}{2\pi\eta\rho_0} \right] \sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right) + \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} -$$
$$- \frac{3\rho_{0q}\gamma_c \omega^4 \rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2 \eta \rho_0} - \frac{c^2 \omega^2 \rho_{0q} \gamma_c}{8\pi^2 \varepsilon_0 \eta^2 \rho_0^2} - \frac{c^2 \rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} \cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right) + K_i. \tag{47}$$

Разложим в (47) выражение $\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}}$ до членов третьего порядка и учтём вид потенциала $\varphi_i(\omega = 0)$ в (8) для случая неподвижной сферы при условии $\gamma_c' = \gamma_c$:

$$\varphi_i \approx \varphi_i(\omega = 0) - \frac{3\rho_{0q}\gamma_c \omega^4 \rho^4}{32\pi\varepsilon_0 c^2 \eta \rho_0} + \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} - \frac{c^2 \omega^2 \rho_{0q}\gamma_c}{8\pi^2 \varepsilon_0 \eta^2 \rho_0^2} + K_i +$$
$$+ \frac{c^3 \rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0 r \sqrt{4\pi\eta\rho_0}} \left(\frac{\omega^2 \rho^2}{2c^2} + \frac{3\omega^4 \rho^4}{8c^4} + \frac{\omega^2}{2\pi\eta\rho_0} \right) \sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0} \right).$$

В данном выражении разложим синус до членов третьего порядка:

$$\varphi_i \approx \varphi_i(\omega = 0) + \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^2}{8\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^2 r^2}{12\varepsilon_0 c^2} +$$
$$+ \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 r^4}{60\varepsilon_0 c^2} + \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 \rho^4}{24\varepsilon_0 c^2} + K_i. \tag{48}$$

Внутренний потенциал вращающейся сферы φ_i в (48) выражен через потенциал неподвижной сферы $\varphi_i(\omega = 0)$ из (8), с добавкой калибровочной функции K_i и пяти членов, которые зависят от угловой скорости ω вращения сферы, от радиус-вектора r и от полярной координаты ρ.

Как было указано выше, для функции K_i должно выполняться условие $\Delta K_i = 0$. Если положить в (48) $\rho = 0$, то видно, что в потенциале φ_i кроме прочего остаётся сумма членов $-\frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 \eta \rho_0} + \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^2 r^4}{60\varepsilon_0 c^2}$. Получается, что при $\rho = 0$ потенциал всё ещё зависит от угловой скорости вращения ω. Это касается и двух точек на поверхности сферы при $r = a$, то есть на полюсах, где ось вращения пересекает сферу. С другой стороны, можно

показать, что на оси и на полюсах вращающейся сферы потенциал не зависит от ω. В следующем разделе прямым расчётом методом запаздывающих потенциалов доказывается, что потенциал на оси цилиндра не зависит от ω. Аналогичный подход может быть применён и к вращающейся сфере с тем же результатом.

Таким образом, калибровочная функция K_i должна быть выбрана таким образом, чтобы сумма членов $-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0\eta\rho_0}+\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2 r^4}{60\varepsilon_0 c^2}$ исчезла в (48). Обратим внимание на то, что выполняются следующие соотношения для лапласианов:

$$\Delta\left[\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{8\pi\varepsilon_0\eta\rho_0}-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0\eta\rho_0}\right]=0,$$

$$\Delta\left[-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2 r^2}{12\varepsilon_0 c^2}+\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2 r^4}{60\varepsilon_0 c^2}+\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{24\varepsilon_0 c^2}\right]=-\Delta\left[\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{32\varepsilon_0 c^2}\right].$$

Здесь представлены лапласианы от пяти членов, входящих в (48). Поскольку должно выполняться условие $\Delta K_i=0$, мы можем выбрать K_i следующим образом:

$$K_i=-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2}{8\pi\varepsilon_0\eta\rho_0}+\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0\eta\rho_0}+\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^2 r^2}{12\varepsilon_0 c^2}-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2 r^4}{60\varepsilon_0 c^2}-$$
$$-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{24\varepsilon_0 c^2}-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{32\varepsilon_0 c^2}.$$

Подстановка выражения K_i в (48) с учётом (8) для $\varphi_i(\omega=0)$ при том, что $\gamma_c'=\gamma_c$, даёт потенциал внутри сферы:

$$\varphi_i\approx\frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-r\cos\left(\frac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{32\varepsilon_0 c^2}. \tag{49}$$

Из сравнения (49) и (8) видно, как за счёт вращения изменяется потенциал φ_i внутри сферы. В частности, появляется дополнительный член, пропорциональный $\omega^2\rho^4$.

Теперь из (49) с помощью (3) можно найти электрическое поле внутри вращающейся сферы. Учтём, что при равномерном вращении векторный потенциал $\mathbf{A}$ в (3) не зависит от времени и потому не делает вклада в напряжённость поля. С учётом этого, используя (17) и (26), имеем:

$$\mathbf{E}_i = -\nabla\varphi_i \approx \frac{c^2\rho_{0q}\gamma_c}{4\pi\varepsilon_0\eta\rho_0 r^2}\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - r\cos\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)\right]\mathbf{e}_r + \\ + \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^3}{8\varepsilon_0 c^2}\mathbf{e}_\rho. \tag{50}$$

Если разложить синус и косинусы, получится следующее:

$$\mathbf{E}_i \approx \frac{\rho_{0q}\gamma_c r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{2\pi\eta\rho_0 r^2}{5c^2}\right)\mathbf{e}_r + \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^3}{8\varepsilon_0 c^2}\mathbf{e}_\rho.$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ есть единичный вектор в направлении радиальной координаты r сферической системы отсчёта, а $\mathbf{e}_\rho$ есть единичный вектор в направлении координаты ρ цилиндрической системы отсчёта.

В отличие от (9), где представлено электрическое поле внутри неподвижной сферы, в (50) вследствие вращения появляется дополнительный малый член. За счёт этого члена электрическое поле внутри вращающейся сферы увеличивается, причём в наибольшей степени это имеет место в плоскости экватора.

4.3. Уточнение скалярных потенциалов для цилиндра

Сравнение (46) и (32) позволяет выразить C_{12} через C_{24}, найти C_{15} в (37) и уточнить вид потенциала за пределами вращающегося цилиндра в (36):

$$C_{12} = C_{24} - \frac{c^2(1-\ln 2)\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}.$$

$$C_{15} = \frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega^2}\left[\sqrt{1-\omega^2 a^2/c^2} - \ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2 a^2/c^2}\right) - 1 + \ln 2\right] + C_{24}.$$

$$\varphi_{or} = -\frac{\rho_{0q} a^2}{2\varepsilon_0} \ln\frac{\rho}{a} + \frac{c^2 \rho_{0q}}{\varepsilon_0 \omega^2}\left[\sqrt{1-\omega^2 a^2/c^2} - \ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2 a^2/c^2}\right) - 1 + \ln 2\right] + C_{24}. \qquad (51)$$

Выше мы предположили, что C_{23} , а значит и C_{24} в (46) не зависят от ω. Поскольку

$$\lim_{\omega\to 0}\left\{\frac{c^2 \rho_{0q}}{\varepsilon_0 \omega^2}\left[\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2} - \ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2 \rho^2/c^2}\right) - 1 + \ln 2\right]\right\} = -\frac{\rho_{0q}\rho^2}{4\varepsilon_0}, \qquad (52)$$

внутренний потенциал (46) при $\omega \to 0$ становится равным:

$$\varphi_{ir}\left(\omega \to 0\right) = -\frac{\rho_{0q}\rho^2}{4\varepsilon_0} + C_{24}. \qquad (53)$$

Сравнение (53) с (15) для случая неподвижного цилиндра приводит к тому, что $C_2 = C_{24}$. С учётом этого равенства, при $\omega \to 0$ внешний потенциал (51) переходит в потенциал (23) неподвижного цилиндра.

Постоянная C_{24} согласно (46) задаёт потенциал на оси вращающегося цилиндра при $\rho = 0$. Найти значение C_{24} можно методом запаздывающих потенциалов.

Пусть имеется вращающийся цилиндр длиной L, а начало цилиндрической системы отсчёта с координатами ρ, ϕ, z_d находится в середине цилиндра, причём ось OZ является осью цилиндра и осью вращения. В первую очередь необходимо определить потенциал поля в некоторой точке P внутри цилиндра, создаваемый одиночным вращающимся зарядом q_n с номером n. Точка P задаётся радиусом-вектором $\mathbf{R} = (x, y, z)$, а текущее положение заряда q_n задаётся радиус-вектором

$$\mathbf{r}_q = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z_d) = \left[\rho\cos\left(\omega t + \phi_0\right), \rho\sin\left(\omega t + \phi_0\right), z_d\right],$$

так что окружность вращения заряда параллельна плоскости XOY, при этом угол ϕ зависит от текущего времени: $\phi = \omega t + \phi_0$, где постоянная ϕ_0 есть начальная фаза.

В момент времени t вектор от заряда q_n до точки P будет

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R} - \mathbf{r}_q = \left[x - \rho\cos\left(\omega t + \phi_0\right), y - \rho\sin\left(\omega t + \phi_0\right), z - z_d \right],$$

а длина этого вектора равняется

$$\begin{aligned} R_P &= \sqrt{\left(x - \rho\cos\phi\right)^2 + \left(y - \rho\sin\phi\right)^2 + \left(z - z_d\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\phi - 2\rho y\sin\phi}. \end{aligned} \tag{54}$$

Формулы Лиенара-Вихерта для скалярного и векторного потенциалов за пределами движущейся точечной частицы имеют следующий вид:

$$\varphi_n = \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0\left(\hat{R}_P - \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{R}}_P / c\right)}, \qquad \mathbf{A}_n = \frac{\mu_0 q_n \hat{\mathbf{v}}}{4\pi\left(\hat{R}_P - \hat{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{R}}_P / c\right)}. \tag{55}$$

В (55) все величины указаны не в текущий момент времени, а в ранний момент времени $\hat{t} = t - \dfrac{\hat{R}_P}{c}$. Величина $\hat{\mathbf{v}}$ обозначает скорость частицы в раннее время, $\hat{\mathbf{R}}_P = \mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}}_q$ есть вектор от заряда до точки P также в ранний момент времени, а радиус-вектор

$$\hat{\mathbf{r}}_q = (\rho\cos\hat{\phi}, \rho\sin\hat{\phi}, z_p) = \left[\rho\cos\left(\omega\hat{t} + \phi_0\right), \rho\sin\left(\omega\hat{t} + \phi_0\right), z_d \right]$$

задаёт положение заряда в момент времени $\hat{t}$, причём длина вектора $\hat{\mathbf{R}}_P$ будет

$$\begin{aligned} \hat{R}_P &= \sqrt{\left(x - \rho\cos\hat{\phi}\right)^2 + \left(y - \rho\sin\hat{\phi}\right)^2 + \left(z - z_d\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\hat{\phi} - 2\rho y\sin\hat{\phi}}. \end{aligned}$$

Рассечём цилиндр двумя близко расположенными плоскостями на расстоянии z_d от начала координат перпендикулярно оси цилиндра и получим тонкий диск толщиной s. Скалярный потенциал в точке P от вращающегося диска с заряженными частицами

согласно принципу суперпозиции потенциалов определяется суммой по всем N зарядам в диске. С учётом (55) для скалярного потенциала, создаваемого диском, можно записать:

$$\varphi_d = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{\left(\hat{R}_P - \hat{\mathbf{v}}_r \cdot \hat{\mathbf{R}}_P / c\right)_n}. \tag{56}$$

где $\hat{\mathbf{v}}_r$ появляется после усреднения скорости в (5) и задаёт скорость заряда в раннее время $\hat{t}$. Если текущая скорость вращения заряда есть $\mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} = (-\omega\rho\sin\phi, \omega\rho\cos\phi, 0)$, то скорость заряда в ранний момент времени будет $\hat{\mathbf{v}}_r = \mathbf{v}_r(\hat{t}) = \frac{d\hat{\mathbf{r}}_q}{d\hat{t}} = (-\omega\rho\sin\hat{\phi}, \omega\rho\cos\hat{\phi}, 0)$. Это следует из того, что $\phi = \omega t + \phi_0$, $\hat{\phi} = \omega\hat{t} + \phi_0$. Так как

$$\hat{\mathbf{R}}_P = \mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}}_q = \left[x - \rho\cos\left(\omega\hat{t} + \phi_0\right), y - \rho\sin\left(\omega\hat{t} + \phi_0\right), z - z_d\right],$$

то будет $\hat{\mathbf{v}}_r \cdot \hat{\mathbf{R}}_P = \omega\rho y\cos\hat{\phi} - \omega\rho x\sin\hat{\phi}$.

Заряд q_n элемента объёма определяется произведением плотности $\rho_{0q}\gamma_r$ движущегося заряда на элемент объёма диска $\frac{s\rho d\rho d\phi}{\gamma_r}$, уменьшенный за счёт движения в γ_r раз. Следовательно, $q_n = \rho_{0q} s\rho d\rho d\phi$, и переходя в (57) от суммы к интегралу, находим:

$$\varphi_d = \frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d} \frac{\rho d\rho d\phi}{\sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\hat{\phi} - 2\rho y\sin\hat{\phi}} - \frac{\omega\rho y\cos\hat{\phi}}{c} + \frac{\omega\rho x\sin\hat{\phi}}{c}}.$$

Для наших целей достаточно поместить точку P в центр координат и найти там потенциал. Для этого в формуле для потенциала диска следует положить $x = y = z = 0$, $R = 0$:

$$\varphi_d\left(R=0\right)=\frac{s\rho_{0q}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\rho\,d\rho\,d\phi}{\sqrt{z_d^2+\rho^2}}=\frac{s\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\int_0^a\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{z_d^2+\rho^2}}=\frac{s\rho_{0q}\sqrt{z_d^2+a^2}}{2\varepsilon_0}-\frac{s\rho_{0q}z_d}{2\varepsilon_0}.$$

Теперь следует просуммировать потенциалы $\varphi_d\left(R=0\right)$ от всех дисков, из которых состоит цилиндр. Если число дисков равно N_d, то потенциал на оси будет равен

$$\varphi_{ir}\left(\rho=0\right)=\sum_{n=1}^{N_d}\left[\varphi_d\left(R=0\right)\right]_n.$$

Мы можем считать что $s=dz_d$, $\varphi_d\left(R=0\right)=d\varphi_{ir}\left(\rho=0\right)$, так что сумму потенциалов дисков можно заменить удвоенным интегралом по переменной z_d в пределах от 0 до $L/2$. Это даёт потенциал в центре цилиндра и одновременно постоянную C_{24}, что позволяет откалибровать внутренний потенциал (46) и внешний потенциал (51):

$$\varphi_{ir}\left(\rho=0\right)=C_{24}=2\int_0^{L/2}\left[\frac{\rho_{0q}\sqrt{a^2+z_d^2}}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho_{0q}z_d}{2\varepsilon_0}\right]dz_d=\frac{\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{L\sqrt{L^2+4a^2}}{4}+a^2\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{2a}-\frac{L^2}{4}\right].$$

$$\varphi_{ir}=\frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\,\omega^2}\left[\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}-\ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}\right)-1+\ln 2\right]+$$
$$+\frac{\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{L\sqrt{L^2+4a^2}}{4}+a^2\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{2a}-\frac{L^2}{4}\right].$$

$$\varphi_{or}=-\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a}+\frac{c^2\rho_{0q}}{\varepsilon_0\,\omega^2}\left[\sqrt{1-\omega^2a^2/c^2}-\ln\left(1+\sqrt{1-\omega^2a^2/c^2}\right)-1+\ln 2\right]+$$
$$+\frac{\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{L\sqrt{L^2+4a^2}}{4}+a^2\,\mathrm{Arsh}\frac{L}{2a}-\frac{L^2}{4}\right].$$

(57)

Если длина L цилиндра очень велика, то для потенциала в центре вращающегося цилиндра радиуса a получается:

$$\varphi_{ir}\left(\rho=0\right)=C_{24}\approx\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0}\operatorname{Arsh}\frac{L}{2a}.$$

Таким образом, согласно (57) постоянная C_{24} в потенциале (46) внутри цилиндра и в потенциале (51) за пределами цилиндра является функцией длины L и радиуса a цилиндра. По мере роста L постоянная C_{24} логарифмически растёт вплоть до положительной бесконечности для бесконечно длинного цилиндра.

При выводе (57) зависимость потенциала $\varphi_{ir}\left(\rho=0\right)$ в центре цилиндра от угловой скорости вращения ω исчезла. Это означает, что C_{23} и C_{24} действительно не зависят от ω, как мы и предполагали.

ИЗ сравнения (53) с (15) следует, что $C_{24}=C_2$, где C_2 согласно (15) задаёт потенциал в центре неподвижного цилиндра при $\rho=0$. С учётом этого можно уточнить потенциалы (15) и (23) внутри и снаружи неподвижного цилиндра:

$$\varphi_{ir}\left(\omega=0\right)=-\frac{\rho_{0q}\rho^2}{4\varepsilon_0}+\frac{\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{L\sqrt{L^2+4a^2}}{4}+a^2\operatorname{Arsh}\frac{L}{2a}-\frac{L^2}{4}\right].$$

$$\varphi_{or}\left(\omega=0\right)=-\frac{\rho_{0q}a^2}{2\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{a}-\frac{\rho_{0q}a^2}{4\varepsilon_0}+\frac{\rho_{0q}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{L\sqrt{L^2+4a^2}}{4}+a^2\operatorname{Arsh}\frac{L}{2a}-\frac{L^2}{4}\right].$$

(58)

Если в формуле для $\varphi_{or}\left(\omega=0\right)$ устремить длину цилиндра L и цилиндрическую координату ρ в бесконечность, то будет $\lim\limits_{\substack{L\to\infty\\ \rho\to\infty}}\varphi_{or}\left(\omega=0\right)=0$, то есть потенциал на бесконечности стремится к нулю. Но если L не велико по сравнению с радиусом цилиндра a, и при этом ищется потенциал далеко за пределами цилиндра, формула для $\varphi_{or}\left(\omega=0\right)$ в (58) требует уточнения ввиду необходимости учёта краевых эффектов, которые не были приняты во внимание при решении уравнения Лапласа для потенциала.

4.4. Внешний скалярный потенциал сферической системы частиц

Так как за пределами сферы плотность заряда $\rho_{0q} = 0$, то согласно (4) для внешнего потенциала справедливо уравнение Лапласа $\Delta\varphi_o = 0$. Стандартный способ решения этого уравнения заключается в разделении переменных, от которых зависит потенциал φ_o. В сферических координатах r, θ, ϕ можно считать, что $\varphi_o = R(r)Y(\theta)$, где функция R зависит только от радиальной координаты r, а функция Y зависит только от угла θ. Вследствие симметрии сферы относительно оси вращения OZ потенциал φ_o не зависит от угла ϕ. Чтобы решить уравнение $\Delta\left[R(r)Y(\theta)\right] = 0$, выразим лапласиан в сферических координатах по формуле (24):

$$\frac{Y}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) + \frac{R}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) = 0 .$$

После умножения на $\frac{r^2}{RY}$ и перестановки членов имеем:

$$\frac{r}{R}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) = -\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) = \lambda .$$

В левой части данного соотношения имеется некоторая функция, зависящая только от r, которая должна равняться некоторой другой функции, зависящей только от θ. Это возможно лишь в одном случае, когда обе эти функции равны некоторой постоянной λ. В результате получается два уравнения:

$$Y'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}Y' + \lambda Y = 0 , \qquad rR'' + 2R' - \frac{\lambda}{r}R = 0 . \tag{59}$$

Для краткости здесь использованы обозначения $Y' = \frac{\partial Y}{\partial\theta}$, $Y'' = \frac{\partial Y'}{\partial\theta} = \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}$, $R' = \frac{\partial R}{\partial r}$, $R'' = \frac{\partial R'}{\partial r} = \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}$, причём частные производные в данном случае можно заменить на обычные производные.

Решение уравнений (59) находится при условии $\lambda = n(n+1)$, где $n = 1, 2, 3\ldots$. При этом частным решением уравнения для Y с точностью до постоянного множителя $C_{n\theta}$

является любой из полиномов Лежандра, определяемых по формуле: $P_n(s)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left[\left(s^2-1\right)^n\right]$, где вместо s следует подставить $\cos\theta$. Таким образом, $Y_n = C_{n\theta}P_n(\cos\theta)$.

Первые шесть полиномов Лежандра имеют следующий вид:

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta, \qquad P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right), \qquad P_3\left(\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\left(5\cos^2\theta-3\right)\cos\theta,$$

$$P_4(\cos\theta)=\frac{1}{8}\left(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3\right), \qquad P_5(\cos\theta)=\frac{1}{8}\left(63\cos^4\theta-70\cos^2\theta+15\right)\cos\theta,$$

$$P_6(\cos\theta)=\frac{1}{16}\left(231\cos^6\theta-315\cos^4\theta+105\cos^2\theta-5\right). \tag{60}$$

При $\lambda=0$ частное решение для Y в (59) имеет вид $Y_0 = C_\theta \ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+C_{0\theta}$. Во избежание появления бесконечности при $\theta=0$ принимается, что постоянная $C_\theta=0$, так что $Y_0 = C_{0\theta}$.

Частное решение уравнения для функции R в (59) при условии $\lambda=n\left(n+1\right)$ выглядит так:

$$R_n=\frac{\alpha_n}{r^{n+1}}+\beta_n r^n, \tag{61}$$

где при $n\geq 1$ следует положить постоянные коэффициенты $\beta_n=0$ во избежание бесконечности потенциала при больших расстояниях r за пределами сферы. Частное решение для R при $n=0$ содержит коэффициент β_0: $R_0=\frac{\alpha_0}{r}+\beta_0$.

С учётом вышеизложенного для внешнего потенциала $\varphi_o = R(r)Y(\theta)$ получается следующее:

$$\varphi_o = C_{0\theta}\left(\frac{\alpha_0}{r}+\beta_0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n C_{n\theta}}{r^{n+1}}P_n\left(\cos\theta\right)=C_{25}+\frac{C_{0\varphi}}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{n\varphi}}{r^{n+1}}P_n\left(\cos\theta\right).$$

В данном выражении первый член соответствует случаю $n=0$, так что сумма начинается с $n=1$, при этом $C_{n\varphi}=\alpha_n C_{n\theta}$, $C_{25}=C_{0\theta}\beta_0$. Подставим сюда полиномы Лежандра из (60):

$$\varphi_o = C_{25} + \frac{C_{0\varphi}}{r} + \frac{C_{1\varphi}\cos\theta}{r^2} + \frac{C_{2\varphi}\left(3\cos^2\theta - 1\right)}{2r^3} + \frac{C_{3\varphi}\left(5\cos^2\theta - 3\right)\cos\theta}{2r^4} + \\ + \frac{C_{4\varphi}\left(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3\right)}{8r^5} + \frac{C_{5\varphi}\left(63\cos^4\theta - 70\cos^2\theta + 15\right)\cos\theta}{8r^6} + \\ + \frac{C_{6\varphi}\left(231\cos^6\theta - 315\cos^4\theta + 105\cos^2\theta - 5\right)}{16r^7} + \ldots \tag{62}$$

Символ ... в правой части (62) указывает на бесконечную сумму компонент потенциала с коэффициентами $C_{n\varphi}$. В рассматриваемом случае члены с коэффициентами $C_{1\varphi}$, $C_{3\varphi}$, $C_{5\varphi}$ и все другие члены, которые умножаются на $\cos\theta$, пропорциональны z. Однако вследствие симметрии потенциал должен зависеть только от z^2, z^4 и от других чётных степеней. Поэтому следует считать, что $C_{1\varphi}=0$, $C_{3\varphi}=0$, $C_{5\varphi}=0$ и т.д., так что все эти члены следует положить равными нулю.

Учитывая теперь соотношение $z=r\cos\theta$, для потенциала находим:

$$\varphi_o = C_{25} + \frac{C_{0\varphi}}{r} + \frac{C_{2\varphi}\left(3z^2 - r^2\right)}{2r^5} + \frac{C_{4\varphi}\left(35z^4 - 30z^2r^2 + 3r^4\right)}{8r^9} + \\ + \frac{C_{6\varphi}\left(231z^6 - 315z^4r^2 + 105z^2r^4 - 5r^6\right)}{16r^{13}} + \ldots \tag{63}$$

Определим с помощью (3) и (63) напряжённость электрического поля, учитывая, что $\frac{\partial \mathbf{A}_o}{\partial t}=0$ ввиду независимости внешнего векторного потенциала $\mathbf{A}_o$ от времени:

$$\mathbf{E}_o = -\nabla\varphi_o \approx \frac{C_{0\varphi}}{r^2}\mathbf{e}_r + \frac{3C_{2\varphi}\rho}{2}\frac{4r^2-5\rho^2}{r^7}\mathbf{e}_\rho + \frac{3C_{2\varphi}z}{2}\frac{2r^2-5\rho^2}{r^7}\mathbf{e}_z +$$
$$+\frac{C_{4\varphi}\rho}{8}\frac{\left(120r^4-420\rho^2r^2+315\rho^4\right)}{r^{11}}\mathbf{e}_\rho + \frac{C_{4\varphi}z}{8}\frac{\left(40r^4-280\rho^2r^2+315\rho^4\right)}{r^{11}}\mathbf{e}_z + \ldots \tag{64}$$

При вычислении градиента $\nabla\varphi_o$ в (64) использовались формулы (26) для градиента в сферических координатах и (17) для градиента в цилиндрических координатах.

Пусть в (49) и в (63) $r \approx a$, и тогда можно приравнять внутренний потенциал φ_i к внешнему потенциалу φ_o на поверхности сферы. Учитывая, что полный заряд неподвижной сферы q_b (10) равен заряду q_ω вращающейся сферы в (39), и используя выражение $z^2 = r^2 - \rho^2$, где $\rho^2 = x^2 + y^2$, находим:

$$\left[\frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{32\varepsilon_0 c^2}\right]_{r\approx a} \approx$$
$$\approx\left[C_{25} + \frac{C_{0\varphi}}{r} + \frac{C_{2\varphi}\left(2r^2-3\rho^2\right)}{2r^5} + \frac{C_{4\varphi}\left(8r^4-40\rho^2r^2+35\rho^4\right)}{8r^9} + \ldots\right]_{r\approx a} \tag{65}$$

Приравняем внутреннее поле $\mathbf{E}_i$ в (50) к внешнему полю $\mathbf{E}_o$ в (64) на поверхности сферы, где $r = a$. С учётом значения заряда q_ω вращающейся сферы в (39), выражение $\mathbf{E}_i$ при $r = a$ упрощается. Это даёт следующее:

$$\left[\frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r + \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^3}{8\varepsilon_0 c^2}\mathbf{e}_\rho\right]_{r\approx a} \approx$$
$$\approx\left[\begin{aligned}&\frac{C_{0\varphi}}{r^2}\mathbf{e}_r + \frac{C_{2\varphi}\rho}{2}\frac{12r^2-15\rho^2}{r^7}\mathbf{e}_\rho + \frac{C_{2\varphi}z}{2}\frac{6r^2-15\rho^2}{r^7}\mathbf{e}_z + \\ &+\frac{C_{4\varphi}\rho}{8}\frac{\left(120r^4-420\rho^2r^2+315\rho^4\right)}{r^{11}}\mathbf{e}_\rho + \frac{C_{4\varphi}z}{8}\frac{\left(40r^4-280\rho^2r^2+315\rho^4\right)}{r^{11}}\mathbf{e}_z + \ldots\end{aligned}\right]_{r\approx a} \tag{66}$$

В левой части (66) нет явных компонент поля, направленных вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_z$ цилиндрической системы отсчёта. Следовательно, в правой части (66) сумма всех подобных компонент поля должна быть равна нулю. При $z = 0$, то есть в плоскости

экватора, это происходит автоматически, так как данные компоненты пропорциональны z.

Можно заметить, что четвёртая компонента в правой части содержит член $\frac{C_{4\varphi}\rho}{8}\frac{315\rho^4}{r^{11}}\mathbf{e}_\rho$, который может сократиться лишь с соответствующими членами в компонентах с коэффициентами $C_{n\varphi}$, где $n \geq 6$. Кроме этого, должна сократиться сумма с двумя членами, пропорциональными $\rho\mathbf{e}_\rho$.

Отсюда следует, что при $r = a$ должно выполняться равенство:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{C_{2\varphi}\rho}{2}\frac{12r^2}{r^7}\mathbf{e}_\rho + \frac{C_{4\varphi}\rho}{8}\frac{120r^4}{r^{11}}\mathbf{e}_\rho + \frac{C_{2\varphi}z}{2}\frac{6r^2-15\rho^2}{r^7}\mathbf{e}_z + \frac{C_{4\varphi}\rho}{8}\frac{315\rho^4}{r^{11}}\mathbf{e}_\rho + \\ + \frac{C_{4\varphi}z}{8}\frac{\left(40r^4-280\rho^2r^2+315\rho^4\right)}{r^{11}}\mathbf{e}_z + \ldots\end{array}\right]_{r\approx a} = 0. \tag{67}$$

Фактически равенство (67) можно рассматривать как систему уравнений для точек поверхности сферы, где при заданных ρ и z это равенство справедливо для соответствующего набора коэффициентов $C_{n\varphi}$. Чем больше компонент поля рассматривается в бесконечном ряду этих компонент, тем для большего количества точек на сфере выполняется равенство (67). Если ограничиться лишь членами $C_{0\varphi}$, $C_{2\varphi}$ и $C_{4\varphi}$, то с учётом (67) из (66) имеем:

$$C_{0\varphi} = \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^3}{8\varepsilon_0 c^2}\mathbf{e}_\rho = -\frac{15C_{2\varphi}\rho^3}{2a^7}\mathbf{e}_\rho - \frac{105C_{4\varphi}\rho^3}{2a^9}\mathbf{e}_\rho. \tag{68}$$

Из (65) следуют соотношения для коэффициентов C_{25} и $C_{4\varphi}$:

$$C_{25} + \frac{C_{2\varphi}}{a^3} + \frac{C_{4\varphi}}{a^5} = 0, \qquad -\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2\rho^4}{32\varepsilon_0 c^2} = \frac{35C_{4\varphi}\rho^4}{8a^9}.$$

Подставляя сюда (68), находим $C_{2\varphi}$, $C_{4\varphi}$ и C_{25}:

$$C_{2\varphi} = \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^7}{30\varepsilon_0\,c^2}, \qquad C_{4\varphi} = -\frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^9}{140\varepsilon_0\,c^2}, \qquad C_{25} = -\frac{11\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^4}{420\varepsilon_0\,c^2}. \tag{69}$$

Если подставить коэффициенты $C_{2\varphi}$ и $C_{4\varphi}$ в (65), получится следующее:

$$\left[-\frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^7}{20\varepsilon_0\,c^2}\frac{\rho^2}{r^5} + \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^9}{28\varepsilon_0\,c^2}\frac{\rho^2}{r^7} + \ldots\right]_{r\approx a} = 0. \tag{70}$$

Соотношение (70) можно рассматривать как дополнительное условие, накладываемое на компоненты потенциала в (62) с коэффициентами $C_{n\varphi}$, где $n \geq 6$. С другой стороны, (70) отражает неточность определения коэффициентов $C_{2\varphi}$ и $C_{4\varphi}$, связанную с использованием лишь первых четырёх членов разложения в (63).

С учётом найденных коэффициентов (68-69) и соотношения $z^2 = r^2 - \rho^2$ можно записать приблизительные выражения для потенциала (63) и напряжённости поля в (64) за пределами сферы:

$$\begin{aligned}\varphi_o \approx{}& \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{11\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^4}{420\varepsilon_0\,c^2} + \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^7}{60\varepsilon_0\,c^2}\frac{\left(2r^2 - 3\rho^2\right)}{r^5} - \\ &- \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^9}{1120\varepsilon_0\,c^2}\frac{\left(8r^4 - 40\rho^2 r^2 + 35\rho^4\right)}{r^9} + \ldots\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_o \approx{}& \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r + \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^7}{20\varepsilon_0\,c^2 r^7}\left[\rho\left(4r^2 - 5\rho^2\right)\mathbf{e}_\rho + z\left(2r^2 - 5\rho^2\right)\mathbf{e}_z\right] - \\ &- \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^9}{224\varepsilon_0\,c^2 r^{11}}\left[\rho\left(24r^4 - 84\rho^2 r^2 + 63\rho^4\right)\mathbf{e}_\rho + z\left(8r^4 - 56\rho^2 r^2 + 63\rho^4\right)\mathbf{e}_z\right] + \ldots\end{aligned} \tag{72}$$

Если в (72) учесть условие (67), то вблизи поверхности сферы поле становится равным величине

$$\mathbf{E}_o\left(r \approx a\right) \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r - \frac{\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^7 \rho^3}{4\varepsilon_0\,c^2 r^7}\mathbf{e}_\rho + \frac{3\rho_{0q}\,\gamma_c\,\omega^2 a^9 \rho^3}{8\varepsilon_0\,c^2 r^9}\mathbf{e}_\rho + \ldots \tag{73}$$

переходя при $r = a$ во внутреннее электрическое поле (50).

Из (71-72) видно, что поле вращающейся сферы отличается от поля неподвижной сферы в (11), однако различие быстро исчезает по мере удаления от поверхности сферы. При увеличении в (62) количества используемых компонент для оценки внешнего потенциала условия (67) и (70) должны соответственно измениться, а в выражениях (71-72) появятся новые компоненты и в какой-то степени изменятся коэффициенты в имеющихся компонентах.

Согласно (71) внешний потенциал φ_o вблизи экватора сферы при $\rho = r = a$ и при условии (70) достигает минимума, с учётом (39) для $q_\omega \approx q\gamma_c = \dfrac{4\pi\rho_{0q}\gamma_c a^3}{3}$ равного

$$\varphi_o\left(\rho = a\right) \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^2 a^4}{32\varepsilon_0 c^2} \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{3q_\omega\omega^2 a}{128\pi\varepsilon_0 c^2}. \tag{74}$$

На полюсе сферы при $r = a$, $\rho = 0$, потенциал (71) равен:

$$\varphi_o\left(\rho = 0\right) \approx \frac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 a}. \tag{75}$$

Относительное изменение потенциала при перемещении от полюса к экватору вдоль поверхности вращающейся сферы согласно (74) и (75) будет равно:

$$\frac{\varphi_o\left(\rho = 0\right) - \varphi_o\left(\rho = a\right)}{\dfrac{q_\omega}{4\pi\varepsilon_0 a}} \approx \frac{3\omega^2 a^2}{32\, c^2}. \tag{76}$$

Подобный эффект был обнаружен также в [18], где электромагнитное поле за пределами вращающейся сферы исследовалось методом запаздывающих потенциалов. Ввиду сложности вычислений появляющиеся в расчётах эллиптические интегралы аппроксимировались с помощью рядов. Было показано, что относительное изменение потенциала на экваторе по сравнению с потенциалом на полюсе вблизи поверхности сферы не превышает значения $\dfrac{6\omega^2 a^2}{c^2}$. В (76) мы имеем более жёсткое ограничение на относительное изменение потенциала, возникающее за счёт вращения. Из (76) следует,

что путём точного измерения электрического потенциала вблизи заряженной сферы можно понять, вращается сфера иди нет.

5. Магнитное поле при наличии общего вращения, частные случаи

5.1. Цилиндр в пределе твёрдого тела

Для вращающегося заряженного цилиндра плотность тока задаётся формулой $\mathbf{j} = \gamma_r \rho_{0q} \mathbf{v}_r$, где фактор Лоренца γ_r определён в (30), а скорость $\mathbf{v}_r$ записывается так:

$$\mathbf{v}_r = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left(-\omega\rho \sin\phi, \omega\rho\cos\phi, 0 \right) = \left(-\omega y, \omega x, 0 \right). \tag{77}$$

При постоянном вращении векторный потенциал $\mathbf{A}$ в (2) не зависит от времени, так что для потенциала внутри цилиндра получается следующее уравнение:

$$\Delta \mathbf{A}_{ir} = -\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0 c^2 \sqrt{1 - \omega^2 \rho^2 / c^2}} \mathbf{v}_r . \tag{78}$$

Решая данное уравнение так, как это было сделано в [6] в отношении векторного поля ускорений, находим компоненты потенциала вдоль осей OX и OY, а также сам векторный потенциал в векторном виде:

$$A_{irx} = \left[\frac{\rho_{0q} c^2}{3\varepsilon_0 \omega^3 \rho} \left(1 - \omega^2 \rho^2 / c^2 \right)^{3/2} - \frac{\rho_{0q} c^2}{3\varepsilon_0 \omega^3 \rho} + \frac{C_{26}}{2} \rho \right] \sin\phi .$$

$$A_{iry} = -\left[\frac{\rho_{0q} c^2}{3\varepsilon_0 \omega^3 \rho} \left(1 - \omega^2 \rho^2 / c^2 \right)^{3/2} - \frac{\rho_{0q} c^2}{3\varepsilon_0 \omega^3 \rho} + \frac{C_{26}}{2} \rho \right] \cos\phi .$$

$$\mathbf{A}_{ir} = \omega\rho \left[\frac{\rho_{0q} c^2}{3\varepsilon_0 \omega^4 \rho^2} - \frac{\rho_{0q} c^2}{3\varepsilon_0 \omega^4 \rho^2} \left(1 - \omega^2 \rho^2 / c^2 \right)^{3/2} - \frac{C_{26}}{2\omega} \right] \mathbf{e}_\phi . \tag{79}$$

В (79) $\mathbf{e}_\phi$ есть единичный вектор цилиндрической угловой координаты, направленный по касательной к окружностям вращения вещества и перпендикулярно

единичным векторам $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_z$, при этом линейная скорость вращения заряженного вещества цилиндра выражается формулой $\mathbf{v}_r = \omega\rho\mathbf{e}_\phi$,

Магнитное поле внутри цилиндра определяется формулой $\mathbf{B}_{ir} = \nabla\times\mathbf{A}_{ir}$. Ротор произвольного вектора $\mathbf{a}$ в цилиндрических координатах ρ,ϕ,z равен:

$$\nabla\times\mathbf{a} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho a_\phi\right)}{\partial\rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_z . \qquad (80)$$

Потенциал $\mathbf{A}_{ir}$ в (79) имеет только одну компоненту $A_{ir\phi}$, направленную вдоль $\mathbf{e}_\phi$, причём $A_{ir\phi}$ не зависит от z. Тогда после подстановки $\mathbf{A}_{ir}$ вместо $\mathbf{a}$ в (80) становится видно, что магнитное поле $\mathbf{B}_{ir}$ тоже имеет одну компоненту, направленную вдоль $\mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{B}_{ir} = \left(\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega}\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2} - C_{26}\right)\mathbf{e}_z .$$

Магнитное поле в центре вращающегося однородно заряженного цилиндра длиной L можно вычислить методом запаздывающих потенциалов, и это поле равно:

$$B_{irz}\left(z=0\right) = \frac{\rho_{0q}\omega}{2\varepsilon_0 c^2}\left(L\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2} - \frac{L^2}{2}\right).$$

Сравнивая $B_{irz}\left(z=0\right)$ с выражением для $\mathbf{B}_{ir}$ при $\rho=0$, определяем постоянную C_{26} и уточняем выражения для векторного потенциала (79) и для магнитного поля $\mathbf{B}_{ir}$:

$$C_{26} = \frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0\omega} - \frac{\rho_{0q}\omega}{2\varepsilon_0 c^2}\left(L\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2} - \frac{L^2}{2}\right).$$

$$\mathbf{A}_{ir} = \frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0}\left[\frac{c^2}{3\omega^3\rho} - \frac{c^2}{3\omega^3\rho}\left(1-\omega^2\rho^2/c^2\right)^{3/2} - \frac{\rho}{2\omega} + \frac{\omega\rho}{4c^2}\left(L\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2} - \frac{L^2}{2}\right)\right]\mathbf{e}_\phi . \qquad (81)$$

$$\mathbf{B}_{ir} = \frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\omega}\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2} - \frac{1}{\omega} + \frac{\omega}{2c^2}\left(L\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2} - \frac{L^2}{2}\right)\right]\mathbf{e}_z . \qquad (82)$$

Если считать, что длина L существенно превышает радиус a цилиндра, то в (82) можно разложить корни и найти приблизительное выражение для магнитного поля:

$$\mathbf{B}_{ir} \approx \frac{\rho_{0q}\omega\left(a^2-\rho^2\right)}{2c^2\varepsilon_0}\mathbf{e}_z .$$

Таким образом, магнитное поле максимально вблизи оси цилиндра, где $\rho = 0$, и стремится к нулю на поверхности цилиндра, где $\rho = a$.

В рассматриваемом нами стационарном случае $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ и согласно (1) справедлив закон Ампера о циркуляции магнитного поля в виде

$$\nabla\times\mathbf{B}_{ir} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j} = \frac{\gamma_r\rho_{0q}}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{v}_r = \frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0 c^2\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}}\mathbf{v}_r . \qquad (83)$$

Подстановка $\mathbf{B}_{ir}$ из (82) в выражение для ротора (80) приводит к тому, что уравнение (83) с учётом соотношения $\mathbf{v}_r = \omega\rho\mathbf{e}_\phi$ удовлетворяется точно.

Рассмотрим теперь поле за пределами цилиндра, для чего применим теорему о циркуляции векторного потенциала в следующем виде [16]:

$$\int_S g\left(B_z\,dxdy + B_y\,dzdx + B_x\,dydz\right) = \int_S \mathrm{g}\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\Phi = \int_S \mathrm{g}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS =$$
$$= \oint_\ell g\left(A_x dx + A_y dy + A_z dz\right) = \oint_\ell g\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. При этом поток магнитного поля $\Phi = -\int_S g\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS$ через некоторую фиксированную поверхность S приводит к циркуляции векторного потенциала $\mathbf{A}$ по неподвижному контуру, окружающему данную поверхность.

Пусть поверхность S есть круговая поверхность радиуса $\rho \geq a$, расположенная перпендикулярно оси цилиндра так, что центр круга лежит на этой оси.

В пределе специальной теории относительности детерминант метрического тензора $g=-1$ и теорема о циркуляции упрощается:

$$\int_S \mathbf{B}_{ir}\cdot\mathbf{n}\,dS=\oint_\ell \mathbf{A}_{or}\cdot d\mathbf{s}=2\pi\rho A_{or}\,. \tag{84}$$

Мы можем считать, что в цилиндрических координатах элемент площади круга $dS=2\pi\rho\,d\rho$, причём магнитное поле внутри цилиндра перпендикулярно поверхности круга, приводя к соотношению $\mathbf{B}_{ir}\cdot\mathbf{n}=B_{irz}$. Интегрируя компоненту магнитного поля B_{irz} из (82) по сечению цилиндра и пренебрегая магнитным полем за пределами цилиндра, с помощью (84) получаем оценку внешнего векторного потенциала вблизи поверхности цилиндра:

$$\mathbf{A}_{or}=\frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0\rho}\left[\frac{c^2}{3\omega^3}-\frac{c^2}{3\omega^3}\left(1-\omega^2a^2/c^2\right)^{3/2}-\frac{a^2}{2\omega}+\frac{\omega a^2}{4c^2}\left(L\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}-\frac{L^2}{2}\right)\right]\mathbf{e}_\phi\,. \tag{85}$$

На поверхности цилиндра при $\rho=a$ внешний потенциал (85) точно переходит во внутренний векторный потенциал (81).

Обозначая в (85) $A_{or\phi}=\dfrac{\partial\mathbf{A}_{or}}{\partial\mathbf{e}_\phi}$, и используя выражение (80) для ротора в цилиндрических координатах, для внешнего магнитного поля имеем:

$$\mathbf{B}_{or}=\nabla\times\mathbf{A}_{or}=-\frac{\partial A_{or\phi}}{\partial z}\mathbf{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{or\phi}\right)}{\partial\rho}\mathbf{e}_z\approx 0\,. \tag{86}$$

Равенство нулю в (86) является приблизительным, так как мы не учитывали тот факт, что на концах длинного цилиндра поле отличается по форме от поля в середине цилиндра. Как внешний векторный потенциал (85), так и внешнее магнитное поле (86) представлены выражениями, справедливыми недалеко от поверхности цилиндра, там, где ещё не проявляются в заметной форме краевые эффекты.

В общем случае внешний векторный потенциал должен вычисляться путём решения уравнения Лапласа $\Delta\mathbf{A}_{or}=0$, вытекающего из (2) с учётом отсутствия плотности тока $\mathbf{j}$ за пределами цилиндра.

По определению, лапласиан произвольного вектора $\mathbf{a}$ выражается формулой:

$$\Delta\mathbf{a} = \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{a}\right) - \nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{a}\right). \tag{87}$$

В цилиндрических координатах дивергенция произвольного вектора $\mathbf{a}$ может быть выражена через компоненты этого вектора a_ρ, a_ϕ и a_z, являющиеся проекциями на оси цилиндрических координат:

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho a_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{88}$$

Подстановка (80) и (88) в (87) с учётом выражения для градиента (17) позволяет выразить векторный лапласиан через производные от компонент вектора в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{a} = &\left(\frac{\partial^2 a_\rho}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho} - \frac{a_\rho}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 a_\rho}{\partial\phi^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 a_\rho}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_\rho + \\ &+\left(\frac{\partial^2 a_\phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\phi}{\partial\rho} - \frac{a_\phi}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 a_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial a_\rho}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 a_\phi}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_\phi + \\ &+\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 a_z}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_z.\end{aligned} \tag{89}$$

Исходя из симметрии длинного вращающегося заряженного цилиндра, внешний векторный потенциал $\mathbf{A}_{or}$ должен быть почти везде направлен вдоль единичного вектора $\mathbf{e}_\phi$ и зависеть только от цилиндрической координаты ρ. Это означает, что потенциал имеет лишь одну ненулевую цилиндрическую компоненту $A_{or\phi}$, не зависящую от ϕ и от z. Из равенства нулю лапласиана в виде $\Delta\mathbf{A}_{or} = 0$ и из (89) следует тогда уравнение:

$$\Delta\mathbf{A}_{or} = \mathbf{e}_\phi\left(\frac{\partial^2 A_{or\phi}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{or\phi}}{\partial\rho} - \frac{A_{or\phi}}{\rho^2}\right) = \mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{or\phi}\right)}{\partial\rho}\right] = 0,$$

имеющее решение в виде $A_{or\phi} = C_{27}\rho + \dfrac{C_{28}}{\rho}$. Постоянную C_{27} следует выбрать равной нулю во избежание бесконечно большого потенциала при росте координаты ρ. Следовательно, $A_{or\phi} = \dfrac{C_{28}}{\rho}$, что точно соответствует компоненте $A_{or\phi}$ в (85) для коэффициента

$$C_{28} = \frac{\rho_{0q}}{\varepsilon_0}\left[\frac{c^2}{3\omega^3} - \frac{c^2}{3\omega^3}\left(1-\omega^2 a^2/c^2\right)^{3/2} - \frac{a^2}{2\omega} + \frac{\omega a^2}{4c^2}\left(L\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2} - \frac{L^2}{2}\right)\right].$$

5.2. Внутреннее магнитное поле сферической системы частиц

Чтобы учесть хаотическое движение заряженных частиц внутри вращающейся сферы в уравнении (2) для векторного потенциала, следует выразить плотность тока через усреднённую скорость частиц $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_r$ и через усреднённый фактор Лоренца $\overline{\gamma} = \gamma'\gamma_r$. Это даёт следующее: $\mathbf{j} = \gamma\rho_{0q}\mathbf{v} = \gamma'\gamma_r\rho_{0q}\mathbf{v}_r = \gamma'\gamma_r\rho_{0q}\omega\rho\mathbf{e}_\phi$. Учитывая, что внутренний векторный потенциал $\mathbf{A}_i$ не зависит от времени, из (2), (30) и (38) имеем:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{A}_i &= -\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega}{\varepsilon_0 c\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\frac{\rho}{\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}}\frac{\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{r}\mathbf{e}_\phi \approx \\ &\approx \left[-\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{\varepsilon_0 c\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\frac{\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{r} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^3}{2\varepsilon_0 c^3\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\frac{\sin\left(\frac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{r}\right]\mathbf{e}_\phi.\end{aligned} \tag{90}$$

В (90) корень $\sqrt{1-\omega^2\rho^2/c^2}$ был разложен до членов второго порядка.

Для оценки $\mathbf{A}_i$ будем считать, что величина $\mathbf{A}_i^* = \dfrac{\varphi_i}{c^2}\mathbf{v}_r = \dfrac{\varphi_i\omega\rho}{c^2}\mathbf{e}_\phi$, вытекающая из преобразований Лоренца, характеризует потенциал $\mathbf{A}_i$ в первом приближении. Учитывая выражение внутреннего скалярного потенциала φ_i из (73), где сделаем замену $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, запишем $\mathbf{A}_i^*$ в явном виде:

$$\mathbf{A}_i^* = \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{c}{4\pi\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\sqrt{\rho^2+z^2}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{\rho^2+z^2}}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)- \\ -\dfrac{1}{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-\dfrac{\omega^2\rho^4}{32c^4}+\dfrac{11\omega^2a^4}{420c^4}\end{array}\right]\mathbf{e}_\phi. \qquad (91)$$

Найдём теперь лапласиан $\Delta\mathbf{A}_i^*$ с помощью (89), учитывая, что $\mathbf{A}_i^*$ имеет только одну ненулевую компоненту $A_{i\phi}^* = \dfrac{\partial\mathbf{A}_i^*}{\partial\mathbf{e}_\phi}$, зависящую от ρ и от z :

$$\Delta\mathbf{A}_i^* = \left(\frac{\partial^2 A_{i\phi}^*}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{i\phi}^*}{\partial\rho}-\frac{A_{i\phi}^*}{\rho^2}+\frac{\partial^2 A_{i\phi}^*}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_\phi =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\dfrac{c\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\dfrac{\dfrac{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}{c}r\cos\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{r^3}- \\ -\dfrac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{\varepsilon_0 c\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{r}-\dfrac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^3}{4\varepsilon_0 c^4}\end{array}\right]\mathbf{e}_\phi. \qquad (92)$$

После вычисления лапласиана в (92) была сделана обратная замена $\sqrt{\rho^2+z^2}=r$.

Из (90) и (92) следует:

$$\Delta\mathbf{A}_i^* \approx \Delta\mathbf{A}_i +$$

$$+\left[\begin{array}{l}\dfrac{c\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{2\pi\varepsilon_0\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\dfrac{\dfrac{\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}{c}r\cos\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{r^3}+ \\ +\dfrac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^3}{2\varepsilon_0 c^3\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{r}-\dfrac{3\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^3}{4\varepsilon_0 c^4}\end{array}\right]\mathbf{e}_\phi.$$

В данном выражении разложим синусы и косинус до членов второго порядка и сделаем обозначение $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_i^* - \mathbf{A}_i$. Это приводит к уравнению для $\mathbf{A}_1$ следующего вида:

$$\Delta \mathbf{A}_1 \approx \left[-\frac{2\rho_{0q}\gamma_c \omega\rho}{3\varepsilon_0 c^2} + \frac{4\pi\eta\rho_0\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho r^2}{15\varepsilon_0 c^4} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^3}{4\varepsilon_0 c^4} \right] \mathbf{e}_\phi .$$

Мы можем предположить в простейшем случае, что вектор $\mathbf{A}_1$ имеет лишь одну ненулевую цилиндрическую компоненту $A_{1\phi}$, которая зависит только от ρ и от z. В этом случае согласно виду лапласиана в (89) с учётом выражения $r^2 = \rho^2 + z^2$ должно быть:

$$\Delta \mathbf{A}_1 = \left(\frac{\partial^2 A_{1\phi}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{1\phi}}{\partial\rho} - \frac{A_{1\phi}}{\rho^2} + \frac{\partial^2 A_{1\phi}}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{1\phi}\right)}{\partial\rho} \right] + \frac{\partial^2 A_{1\phi}}{\partial z^2} \right\} \mathbf{e}_\phi \approx$$

$$\approx \left[-\frac{2\rho_{0q}\gamma_c \omega\rho}{3\varepsilon_0 c^2} + \frac{4\pi\eta\rho_0\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho r^2}{15\varepsilon_0 c^4} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^3}{4\varepsilon_0 c^4} \right] \mathbf{e}_\phi .$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{1\phi}\right)}{\partial\rho} \right] + \frac{\partial^2 A_{1\phi}}{\partial z^2} \approx -\frac{2\rho_{0q}\gamma_c \omega\rho}{3\varepsilon_0 c^2} + \frac{4\pi\eta\rho_0\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho r^2}{15\varepsilon_0 c^4} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^3}{4\varepsilon_0 c^4} . \tag{93}$$

Последнее выражение в (93) есть уравнение для компоненты $A_{1\phi}$ со следующим возможным общим решением:

$$A_{1\phi} \approx -\frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega\rho r^2}{15\varepsilon_0 c^2} + \frac{\pi\eta\rho_0\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho r^4}{105\varepsilon_0 c^4} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^5}{96\varepsilon_0 c^4} + \frac{C_{29}\rho}{2} + \frac{C_{30}}{\rho} + C_{31}z + C_{32} .$$

Здесь предполагается, что $\frac{C_{29}\rho}{2} + \frac{C_{30}}{\rho}$ является частным решением уравнения $\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{1\phi}\right)}{\partial\rho} \right] = 0$, а $C_{31}z + C_{32}$ является частным решением уравнения $\frac{\partial^2 A_{1\phi}}{\partial z^2} = 0$, так что удовлетворяется однородное уравнение $\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{1\phi}\right)}{\partial\rho} \right] + \frac{\partial^2 A_{1\phi}}{\partial z^2} = 0$.

В этом случае постоянную C_{30} следует положить равной нулю во избежание бесконечности в компоненте $A_{1\phi}$ при $\rho = 0$. Постоянная C_{32} также должна равняться нулю, чтобы при $\rho = 0$ на оси вращения, где заряженное вещество покоится, компонента $A_{1\phi}$ стала равной нулю. Равенство нулю C_{31} связано с тем, что потенциал не может быть пропорционален z, иначе зависимость потенциала будет разная в верхней и нижней полусферах из-за смены знака z.

Среди множества решений другим простейшим решением однородного уравнения $\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{1\phi}\right)}{\partial\rho}\right] + \frac{\partial^2 A_{1\phi}}{\partial z^2} = 0$ в (93) является выражение:

$$A'_{1\phi} = F(\rho)G(z) = \left(\frac{C_{33}\rho}{2} + \frac{C_{34}}{\rho}\right)\left(C_{35}z + C_{36}\right) = \frac{C_{33}C_{35}z\rho}{2} + \frac{C_{34}C_{35}z}{\rho} + \frac{C_{33}C_{36}\rho}{2} + \frac{C_{34}C_{36}}{\rho},$$

если предполагать, что $\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho F\right)}{\partial\rho}\right] = 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0$.

В выражении для $A'_{1\phi}$ необходимо, чтобы было $C_{34} = 0$ во избежание бесконечности при $\rho = 0$, а также $C_{35} = 0$ в связи с нечётностью z.

Следовательно, простейшее общее решение уравнения (93) имеет вид:

$$A_{1\phi} \approx -\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho r^2}{15\varepsilon_0 c^2} + \frac{\pi\eta\rho_0\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho r^4}{105\varepsilon_0 c^4} - \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^5}{96\varepsilon_0 c^4} + \frac{C_{29}\rho}{2}.$$

Обозначим для удобства $C_{29} = \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega C_{37}}{\varepsilon_0 c^2}$. Далее, с одной стороны можно записать $\mathbf{A}_1 = A_{1\phi}\mathbf{e}_\phi$, с другой стороны, мы определили, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_i^* - \mathbf{A}_i$. Отсюда с учётом $\mathbf{A}_i^*$ из (91) и замены $\sqrt{\rho^2 + z^2} = r$ находим внутренний векторный потенциал:

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^* - A_{1\phi}\mathbf{e}_\phi \approx$$
$$\approx \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{c}{4\pi\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\,r}\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-\dfrac{1}{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)- \\ -\dfrac{\omega^2\rho^4}{48c^4}+\dfrac{11\omega^2a^4}{420c^4}-\dfrac{\pi\eta\rho_0 r^4}{105c^4}+\dfrac{r^2}{15c^2}-\dfrac{C_{37}}{2c^2}\end{array}\right]\mathbf{e}_\phi. \tag{94}$$

Поскольку $\mathbf{v}_r = \omega\rho\mathbf{e}_\phi$, то из (94) видно, что векторный потенциал $\mathbf{A}_i$ параллелен скорости $\mathbf{v}_r$ вращающегося заряженного вещества сферы. Квадратная скобка в (94) с точностью до множителя $\dfrac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{\varepsilon_0}$ представляет собой единственную ненулевую цилиндрическую компоненту $A_{i\phi} = \dfrac{\partial\mathbf{A}_i}{\partial\mathbf{e}_\phi}$ векторного потенциала. С помощью (80) находим магнитное поле внутри сферы, используя в (94) соотношение $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$:

$$\mathbf{B}_i = \nabla\times\mathbf{A}_i = -\frac{\partial A_{i\phi}}{\partial z}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{i\phi}\right)}{\partial\rho}\mathbf{e}_z \approx$$
$$\approx -\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho z}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-c\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{4\pi\eta\rho_0 r^3\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}+ \\ +\dfrac{2}{15c^2}-\dfrac{4\pi\eta\rho_0 r^2}{105c^4}\end{array}\right]\mathbf{e}_\rho +$$
$$+\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{c\left(2r^2-\rho^2\right)}{4\pi\eta\rho_0 r^3\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)+\dfrac{\rho^2}{4\pi\eta\rho_0 r^2}\cos\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)- \\ -\dfrac{1}{2\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)+\dfrac{2\left(r^2+\rho^2\right)}{15c^2}-\dfrac{\omega^2\rho^4}{8c^4}+ \\ +\dfrac{11\omega^2a^4}{210c^4}-\dfrac{2\pi\eta\rho_0 r^2\left(r^2+2\rho^2\right)}{105c^4}-\dfrac{C_{37}}{c^2}\end{array}\right]\mathbf{e}_z. \tag{95}$$

Для оценки коэффициента C_{37} выберем точку P вблизи центра сферы и вычислим магнитное поле в этой точке, то есть при малых значениях радиус-вектора $\mathbf{R} = (x, y, z)$. Подставим в формулу Лиенара-Вихерта (55) для векторного потенциала за пределами

движущейся точечной заряженной частицы вместо $\hat{\mathbf{v}}$ скорость вращения $\hat{\mathbf{v}}_r = \mathbf{v}_r(\hat{t}) = \dfrac{d\hat{\mathbf{r}}_q}{d\hat{t}} = (-\omega\rho\sin\hat{\phi}, \omega\rho\cos\hat{\phi}, 0)$, взятую в раннее время $\hat{t} = t - \dfrac{\hat{R}_P}{c}$. Здесь

$$\begin{aligned}\hat{R}_P &= \sqrt{\left(x-\rho\cos\hat{\phi}\right)^2 + \left(y-\rho\sin\hat{\phi}\right)^2 + \left(z-z_d\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + z_d^2 - 2zz_d + \rho^2 - 2\rho x\cos\hat{\phi} - 2\rho y\sin\hat{\phi}}.\end{aligned} \tag{96}$$

есть расстояние от заряженной частицы до точки P в раннее время $\hat{t}$. Вектор

$$\hat{\mathbf{r}}_q = (\rho\cos\hat{\phi}, \rho\sin\hat{\phi}, z_p) = \left[\rho\cos\left(\omega\hat{t}+\phi_0\right), \rho\sin\left(\omega\hat{t}+\phi_0\right), z_d\right]$$

задаёт положение вращающейся внутри сферы заряженной частицы в момент времени $\hat{t}$, при этом вектор $\hat{\mathbf{R}}_P = \mathbf{R} - \hat{\mathbf{r}}_q$.

Из (55) для векторного потенциала частицы с номером n следует:

$$\mathbf{A}_n = \frac{\mu_0 q_n}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mathbf{v}}_r}{\hat{R}_P - \hat{\mathbf{v}}_r \cdot \hat{\mathbf{R}}_P / c}\right)_n,$$

где $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ обозначает магнитную постоянную, q_n есть заряд частицы, $\hat{\mathbf{v}}_r \cdot \hat{\mathbf{R}}_P = \omega\rho y\cos\hat{\phi} - \omega\rho x\sin\hat{\phi}$.

Рассечём сферу на множество тонких дисков так, чтобы все диски были параллельны друг другу и плоскости XOY, и при этом вращались относительно оси OZ с угловой скоростью ω. Выберем один из дисков, пересекающем ось OZ при $z = z_d$, и просуммируем векторные потенциалы от всех точечных зарядов этого диска. Это даст векторный потенциал диска:

$$\mathbf{A}_d = \sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{n=1}^{N} q_n\left(\frac{\hat{\mathbf{v}}_r}{\hat{R}_P - \hat{\mathbf{v}}_r \cdot \hat{\mathbf{R}}_P / c}\right)_n.$$

Заряд вращающейся в диске точечной частицы в цилиндрических координатах можно выразить через инвариантную плотность заряда ρ_{0q}, факторы Лоренца γ и γ_r, и через движущийся объём:

$$q_n = \frac{\rho_{0q}\gamma s\rho\, d\rho\, d\phi}{\gamma_r},$$

здесь s есть толщина диска.

Величина $\dfrac{s\rho\, d\rho\, d\phi}{\gamma_r}$ задаёт элемент объёма вращающегося диска, который в результате Лоренцевского сокращения в γ_r меньше, чем элемент объёма $s\rho\, d\rho\, d\phi$ неподвижного диска. Величина $\rho_{0q}\gamma$ определяет эффективную плотность заряда с учётом его вращения внутри диска и с учётом хаотического движения частиц. Вместо γ следует подставить $\overline{\gamma} = \gamma'\gamma_r$. Это даёт следующее: $q_n = \rho_{0q}\gamma' s\rho\, d\rho\, d\phi$.

Спроектируем теперь выражение для $\mathbf{A}_d$ на ось OX, учитывая, что $\hat{\mathbf{v}}_r = (-\omega\rho\sin\hat{\phi}, \omega\rho\cos\hat{\phi}, 0)$, и перейдём от суммы к интегралу:

$$A_{dx} = -\frac{\mu_0\rho_{0q}s\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{\gamma'\rho^2\, d\rho\sin\hat{\phi}\, d\phi}{\hat{R}_P - \dfrac{\omega\rho y}{c}\cos\hat{\phi} + \dfrac{\omega\rho x}{c}\sin\hat{\phi}}. \tag{97}$$

Для компоненты A_{dy} аналогично можно записать:

$$A_{dy} = \frac{\mu_0\rho_{0q}s\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{\gamma'\rho^2\, d\rho\cos\hat{\phi}\, d\phi}{\hat{R}_P - \dfrac{\omega\rho y}{c}\cos\hat{\phi} + \dfrac{\omega\rho x}{c}\sin\hat{\phi}}. \tag{98}$$

Поскольку $\phi = \omega t + \phi_0$, $\hat{\phi} = \omega\hat{t} + \phi_0$, $\hat{t} = t - \dfrac{\hat{R}_P}{c}$, то будет $\hat{\phi} = \phi - \dfrac{\omega\hat{R}_P}{c}$, и значит

$$\cos\hat{\phi} = \cos\phi\cos\frac{\omega\hat{R}_P}{c} + \sin\phi\sin\frac{\omega\hat{R}_P}{c}, \qquad \sin\hat{\phi} = \sin\phi\cos\frac{\omega\hat{R}_P}{c} - \cos\phi\sin\frac{\omega\hat{R}_P}{c}.$$

(99)

Магнитное поле определяется формулой $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ согласно (3). Следовательно, для проекции магнитного поля от одного диска на ось OZ имеем: $B_{dz} = \frac{\partial A_{dy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{dx}}{\partial y}$.

Вычислим вначале $\frac{\partial A_{dy}}{\partial x}$ для A_{dy} (98):

$$\frac{\partial A_{dy}}{\partial x} = \frac{\mu_0 \rho_{0q} s \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos\hat{\phi}}{\hat{R}_P - \frac{\omega \rho y}{c} \cos\hat{\phi} + \frac{\omega \rho x}{c} \sin\hat{\phi}} \right) \gamma' \rho^2 \, d\rho \, d\phi .$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos\hat{\phi}}{\hat{R}_P - \frac{\omega \rho y}{c} \cos\hat{\phi} + \frac{\omega \rho x}{c} \sin\hat{\phi}} \right) =$$

$$= \frac{\left(\hat{R}_P - \frac{\omega \rho y}{c} \cos\hat{\phi} + \frac{\omega \rho x}{c} \sin\hat{\phi} \right) \frac{\partial \cos\hat{\phi}}{\partial x} - \cos\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{R}_P - \frac{\omega \rho y}{c} \cos\hat{\phi} + \frac{\omega \rho x}{c} \sin\hat{\phi} \right)}{\left(\hat{R}_P - \frac{\omega \rho y}{c} \cos\hat{\phi} + \frac{\omega \rho x}{c} \sin\hat{\phi} \right)^2}.$$

Далее нас будет интересовать магнитное поле в центре сферы при $\mathbf{R} = (x, y, z) = 0$, где координаты x и y точки P равны нулю. С учётом этого можно записать:

$$\frac{\partial A_{dy}}{\partial x} (R = 0) =$$

$$= \frac{\mu_0 \rho_{0q} s \omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_d} \frac{\hat{R}_P \frac{\partial \cos\hat{\phi}}{\partial x} - \cos\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{R}_P - \frac{\omega \rho y}{c} \cos\hat{\phi} + \frac{\omega \rho x}{c} \sin\hat{\phi} \right)}{\hat{R}_P^2} \gamma' \rho^2 \, d\rho \, d\phi.$$

Аналогично находим для A_{dx} в (97):

$$\frac{\partial A_{dx}}{\partial y}\left(R=0\right)=$$

$$=-\frac{\mu_0\rho_{0q}s\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{\hat{R}_P\frac{\partial\sin\hat{\phi}}{\partial y}-\sin\hat{\phi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{R}_P-\frac{\omega\rho y}{c}\cos\hat{\phi}+\frac{\omega\rho x}{c}\sin\hat{\phi}\right)}{\hat{R}_P^2}\gamma'\rho^2\,d\rho\,d\phi.$$

Из (99) находим:

$$\frac{\partial\cos\hat{\phi}}{\partial x}=\frac{\omega}{c}\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial x}\sin\hat{\phi},\qquad \frac{\partial\cos\hat{\phi}}{\partial y}=\frac{\omega}{c}\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial y}\sin\hat{\phi},$$

$$\frac{\partial\sin\hat{\phi}}{\partial x}=-\frac{\omega}{c}\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial x}\cos\hat{\phi},\qquad \frac{\partial\sin\hat{\phi}}{\partial y}=-\frac{\omega}{c}\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial y}\cos\hat{\phi}. \tag{100}$$

С учётом этого для магнитного поля в центре будет:

$$B_{dz}\left(R=0\right)=\frac{\partial A_{dy}}{\partial x}\left(R=0\right)-\frac{\partial A_{dx}}{\partial y}\left(R=0\right)=$$

$$=-\frac{\mu_0\rho_{0q}s\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial x}\cos\hat{\phi}+\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial y}\sin\hat{\phi}-\frac{\omega\hat{R}_P}{c}\left(\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial x}\sin\hat{\phi}-\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial y}\cos\hat{\phi}\right)}{\hat{R}_P^2}\gamma'\rho^2\,d\rho\,d\phi. \tag{101}$$

Используя $\hat{R}_P$ в (96) и учитывая (100), вычислим производные $\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial x}$ и $\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial y}$, и затем положим в них $x=0$, $y=0$:

$$\frac{\partial\hat{R}_P}{\partial x}\left(R=0\right)=-\frac{\rho\cos\hat{\phi}}{\hat{R}_P},\qquad \frac{\partial\hat{R}_P}{\partial y}\left(R=0\right)=-\frac{\rho\sin\hat{\phi}}{\hat{R}_P}.$$

Определим $\hat{R}_P$ в центре сферы: $\hat{R}_P\left(R=0\right)=\sqrt{z_d^2+\rho^2}$. С учётом всего этого для магнитного поля (101) имеем:

$$B_{dz}\left(R=0\right)=\frac{\mu_0\rho_{0q}s\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{1}{\hat{R}_P^3}\gamma'\rho^3\,d\rho\,d\phi=\frac{\mu_0\rho_{0q}s\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_d}\frac{\gamma'\rho^3\,d\rho\,d\phi}{\left(z_d^2+\rho^2\right)^{3/2}}.$$

Подставим в выражение для $B_{dz}\left(R=0\right)$ приблизительное значение фактора Лоренца $\gamma'\approx\gamma_c-\frac{2\pi\eta\rho_0\left(z_d^2+\rho^2\right)\gamma_c}{3c^2}$ из (38) и возьмём интегралы по цилиндрическим переменным ϕ и ρ:

$$B_{dz}\left(R=0\right)=\frac{\mu_0\rho_{0q}s\omega\gamma_c}{2}\left(a+\frac{z_d^2}{a}-2z_d\right)-\frac{\mu_0\pi\eta\rho_0\rho_{0q}s\omega\gamma_c}{3c^2}\left(\frac{a^3}{3}-az_d^2+\frac{2z_d^3}{3}\right).$$

Просуммируем теперь вклады в магнитное поле в центре сферы от всех дисков, из которых состоит сфера:

$$B_z\left(R=0\right)=\sum_n\left[B_{dz}\left(R=0\right)\right]_n.$$

Полагая, что $s=dz_d$, заменим сумму полей дисков на удвоенный интеграл по переменной z_d в пределах от 0 до a:

$$B_z\left(R=0\right)=\mu_0\rho_{0q}\omega\gamma_c\int_0^a\left(a+\frac{z_d^2}{a}-2z_d\right)dz_d-\frac{2\mu_0\pi\eta\rho_0\rho_{0q}\omega\gamma_c}{3c^2}\int_0^a\left(\frac{a^3}{3}-az_d^2+\frac{2z_d^3}{3}\right)dz_d=$$
$$=\frac{\mu_0\rho_{0q}\omega\gamma_c a^2}{3}-\frac{\mu_0\pi\eta\rho_0\rho_{0q}\omega\gamma_c a^4}{9c^2}.$$

(102)

Разложим в (95) синусы и косинусы и положим $\rho=0$, $r=0$, чтобы найти магнитное поле в центре сферы:

$$\mathbf{B}_i\left(R=0\right)\approx\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega}{\varepsilon_0}\left[\frac{a^2}{c^2}-\frac{C_{37}}{c^2}-\frac{\pi\eta\rho_0a^4}{3c^4}+\frac{11\omega^2a^4}{210c^4}\right]\mathbf{e}_z.$$

Сравнивая $\mathbf{B}_i\left(R=0\right)$ с (102), получаем оценку C_{37}, а затем уточняем векторный потенциал (94) и магнитное поле (95) внутри сферы:

$$C_{37} \approx \frac{2a^2}{3} - \frac{2\pi\eta\rho_0 a^4}{9c^2} + \frac{11\omega^2 a^4}{210c^2}.$$

$$\mathbf{A}_i \approx \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{c}{4\pi\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\,r}\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - \dfrac{1}{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - \\ -\dfrac{a^2}{3c^2} + \dfrac{r^2}{15c^2} - \dfrac{\omega^2\rho^4}{48c^4} - \dfrac{\pi\eta\rho_0 r^4}{105c^4} + \dfrac{\pi\eta\rho_0 a^4}{9c^4}\end{array}\right]\mathbf{e}_\phi. \tag{103}$$

$$\mathbf{B}_i \approx -\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega\rho z}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{r\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - c\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)}{4\pi\eta\rho_0 r^3\sqrt{4\pi\eta\rho_0}} + \\ +\dfrac{2}{15c^2} - \dfrac{4\pi\eta\rho_0 r^2}{105c^4}\end{array}\right]\mathbf{e}_\rho +$$

$$+\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{c\left(2r^2-\rho^2\right)}{4\pi\eta\rho_0 r^3\sqrt{4\pi\eta\rho_0}}\sin\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) + \dfrac{\rho^2}{4\pi\eta\rho_0 r^2}\cos\left(\dfrac{r}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - \\ -\dfrac{1}{2\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) + \dfrac{2\left(r^2+\rho^2\right)}{15c^2} - \dfrac{2a^2}{3c^2} - \dfrac{\omega^2\rho^4}{8c^4} - \\ -\dfrac{2\pi\eta\rho_0 r^2\left(r^2+2\rho^2\right)}{105c^4} + \dfrac{2\pi\eta\rho_0 a^4}{9c^4}\end{array}\right]\mathbf{e}_z. \tag{104}$$

Если в (103) и в (104) положить фактор Лоренца в центре сферы $\gamma_c = 1$, разложить синусы и косинусы и пренебречь малыми членами, содержащими в знаменателе c^4, то векторный потенциал и магнитное поле совпадут с соответствующими выражениями внутри вращающегося однородно заряженного твёрдого шара, представленными в [7].

5.3. Внешнее магнитное поле сферической системы частиц

Для вращающейся однородной сферической системы заряженных частиц внешний векторный потенциал не зависит от угла ϕ и потому в сферических координатах r,θ,ϕ потенциал может быть представлен так:

$$\mathbf{A}_o = A_{or}\left(r,\theta\right)\mathbf{e}_r + A_{o\theta}\left(r,\theta\right)\mathbf{e}_\theta + A_{o\phi}\left(r,\theta\right)\mathbf{e}_\phi . \tag{105}$$

Согласно (2), для внешнего векторного потенциала ввиду отсутствия токов в окружающем пространстве должно выполняться векторное уравнение Лапласа в виде $\Delta\mathbf{A}_o = 0$. Векторный оператор Лапласа для сферических компонент некоторого вектора $\mathbf{a}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{a} = &\left(\Delta a_r - \frac{2a_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(a_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r + \\ &+\left(\Delta a_\theta - \frac{a_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_\theta + \\ &+\left(\Delta a_\phi - \frac{a_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_\phi .\end{aligned} \tag{106}$$

В [18] в декартовых координатах с помощью метода запаздывающих потенциалов были найдены декартовые компоненты векторного потенциала вращающейся сферической системы заряженных частиц в средней зоне:

$$A_{ox} \approx \frac{\mu_0\omega^4\rho_{0q}a^5x\gamma_c}{15c^3} - \frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5y\gamma_c}{15r^3}\left(1 - \frac{10\pi\eta\rho_0a^2}{21c^2} - \frac{15\omega^2a^2}{14c^2}\right).$$

$$A_{oy} \approx \frac{\mu_0\omega^4\rho_{0q}a^5y\gamma_c}{15c^3} + \frac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5x\gamma_c}{15r^3}\left(1 - \frac{10\pi\eta\rho_0a^2}{21c^2} - \frac{15\omega^2a^2}{14c^2}\right). \tag{107}$$

Компонента A_{oz} получается равной нулю, так что имеем: $\mathbf{A}_o = A_{ox}\mathbf{e}_x + A_{oy}\mathbf{e}_y$. Заменяя здесь декартовые единичные векторы на сферические единичные векторы по правилу

$$\mathbf{e}_x = \sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\mathbf{e}_\phi , \quad \mathbf{e}_y = \sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\phi\mathbf{e}_\theta + \cos\phi\mathbf{e}_\phi ,$$

и выражая декартовые координаты x и y через сферические координаты в виде

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\,,$$

находим следующее:

$$\mathbf{A}_o = C_{39} r\sin^2\theta\,\mathbf{e}_r + \frac{C_{38}\sin\theta}{r^2}\mathbf{e}_\phi + C_{39} r\sin\theta\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta\,, \tag{108}$$

где $C_{38} = \dfrac{\mu_0\omega\rho_{0q}a^5\gamma_c}{15}\left(1 - \dfrac{10\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2} - \dfrac{15\omega^2 a^2}{14c^2}\right)$, $C_{39} = \dfrac{\mu_0\omega^4\rho_{0q}a^5\gamma_c}{15c^3}$.

Зависимость потенциала от сферических координат в (108) по своей форме соответствует зависимости в (105).

Предположим теперь, что и в ближней зоне векторный потенциал имеет ту же самую форму, что и в (108). Ввиду малости C_{39} и существенного различия коэффициентов C_{38} и C_{39} будем считать, что при решении уравнения $\Delta\mathbf{A}_o = 0$ за пределами сферы компоненты потенциала с этими коэффициентами можно рассматривать независимо друг от друга. В связи с этим запишем потенциал в ближней зоне так:

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_{o1} + \mathbf{A}_{o2}\,, \qquad \mathbf{A}_{o1} = A_{o\phi}\,\mathbf{e}_\phi = R(r)\Theta(\theta)\mathbf{e}_\phi\,,$$

$$\mathbf{A}_{o2} = A_{or}\,\mathbf{e}_r + A_{o\theta}\,\mathbf{e}_\theta = N(r)M(\theta)\mathbf{e}_r + G(r)H(\theta)\mathbf{e}_\theta \approx 0\,. \tag{109}$$

где функции $R(r)$ и $\Theta(\theta)$, $N(r)$ и $M(\theta)$, $G(r)$ и $H(\theta)$, зависят от r и θ, соответственно.

Подставляя $\mathbf{A}_{o1}$ из (109) вместо вектора $\mathbf{a}$ в (106), с учётом уравнения $\Delta\mathbf{A}_{o1} = 0$ приходим к уравнению для компоненты $A_{o\phi}$:

$$\Delta\mathbf{A}_{o1} = \left(\Delta A_{o\phi} - \frac{A_{o\phi}}{r^2\sin^2\theta}\right)\mathbf{e}_\phi = 0\,, \qquad \Delta A_{o\phi} - \frac{A_{o\phi}}{r^2\sin^2\theta} = 0\,.$$

Учтём здесь выражение лапласиана (24) в сферических координатах и выражение $A_{o\phi} = R(r)\Theta(\theta)$ в (109):

$$\frac{\Theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) + \frac{R}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) - \frac{R\Theta}{r^2\sin^2\theta} = 0 .$$

Умножим все члены данного уравнения на $\frac{r^2}{R\Theta}$ и переставим члены:

$$\frac{r}{R}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = \lambda . \qquad (110)$$

В (110) функции и переменные разделены так, что возникают два независимых уравнения, в которых присутствует постоянная λ. Решение первого уравнения можно представить так:

$$\frac{r}{R}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) = \lambda \Rightarrow R = \alpha r^{\frac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + \beta r^{\frac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}}, \quad \lambda \geq -\frac{1}{4} .$$

Для того, чтобы функция R содержала только целые степени координаты r, будем считать, что $\lambda = n(n+1)$, где n есть целое число. Отсюда следуют нормализованные частные решения для функции R, совпадающие по форме с (61) и содержащие постоянные коэффициенты α_n и β_n :

$$R_n = \frac{\alpha_n}{r^{n+1}} + \beta_n r^n . \qquad (111)$$

Перейдём ко второму уравнению в (110):

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = \lambda .$$

Если обозначить $\Theta' = \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$, $\Theta'' = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}$, то это уравнение при условии $\lambda = n(n+1)$ перепишется так:

$$\Theta'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta' - \left[\frac{1}{\sin^2\theta} - n(n+1)\right]\Theta = 0. \qquad (112)$$

Мы видим, что данное уравнение отличается от первого уравнения в (59), так что функция Θ не совпадает с функцией Y в (59). При этом частные нормализованные решения для Y в (59) выражались через полиномы Лежандра как функции от $\cos\theta$. Предположим по аналогии, что частные нормализованные решения для Θ выражаются как функции от $\sin\theta$. При переходе от функции $\Theta(\theta)$ к её выражению в виде $\Theta(\sin\theta)$ изменятся производные:

$$\Theta' = \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \sin\theta}\frac{\partial \sin\theta}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \sin\theta}.$$

$$\begin{aligned}
\Theta'' &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = \frac{\partial \Theta'}{\partial \theta} = \frac{\partial \Theta'}{\partial \sin\theta}\frac{\partial \sin\theta}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial \sin\theta}\left(\cos\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \sin\theta}\right) = \\
&= \cos\theta \frac{\partial \sqrt{1-\sin^2\theta}}{\partial \sin\theta}\frac{\partial \Theta}{\partial \sin\theta} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sin\theta^2} = \\
&= -\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \sin\theta} + \left(1-\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sin\theta^2}.
\end{aligned}$$

Подставим эти производные в (112). заменим $\sin\theta$ на переменную t и обозначим $\frac{\partial \Theta}{\partial \sin\theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \Theta'_t, \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \sin\theta^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \Theta''_t$. Это даёт следующее уравнение для Θ как функции от t:

$$\left(1-t^2\right)\Theta''_t + \frac{\left(1-2t^2\right)}{t}\Theta'_t - \left[\frac{1}{t^2} - n(n+1)\right]\Theta = 0. \qquad (113)$$

Если исходить из разделения переменных в (110), то видно, что в (113) частные производные вполне можно заменить на обычные производные, так что фактически $\Theta_t' = \dfrac{d\Theta}{dt}$, $\Theta_t'' = \dfrac{d^2\Theta}{dt^2}$.

Обратимся к уравнению (59) и будем считать, что функция $Y(\theta)$ есть функция вида $Y(\cos\theta)$. Выразим также производные через $\cos\theta$:

$$Y' = \frac{\partial Y}{\partial\theta} = \frac{\partial Y}{\partial\cos\theta}\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\cos\theta},$$

$$\begin{aligned}
Y'' &= \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} = \frac{\partial Y'}{\partial\theta} = \frac{\partial Y'}{\partial\cos\theta}\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\left(-\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\cos\theta}\right) = \\
&= \sin\theta\frac{\partial\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\partial\cos\theta}\frac{\partial Y}{\partial\cos\theta} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\cos\theta^2} = \\
&= -\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\cos\theta} + \left(1-\cos^2\theta\right)\frac{\partial^2 Y}{\partial\cos\theta^2}.
\end{aligned}$$

Подставим эти производные в (59), заменим $\cos\theta$ на переменную s и обозначим $\dfrac{\partial Y}{\partial\cos\theta} = \dfrac{\partial Y}{\partial s} = Y_s'$, $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\cos\theta^2} = \dfrac{\partial^2 Y}{\partial s^2} = Y_t''$. В результате при условии $\lambda = n(n+1)$ приходим к уравнению для Y как функции от s:

$$\left(1-s^2\right)Y_t'' - 2sY_s' + n(n+1)Y = 0. \qquad (114)$$

Уравнение (114) является уравнением Лежандра и его нормализованными решениями с точностью до постоянных коэффициентов являются полиномы Лежандра согласно формуле Родрига: $P_n(s) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\partial^n}{\partial s^n}\left[\left(s^2-1\right)^n\right]$. Вид этих полиномов показан в (60), где $\cos\theta$ следует заменить на s.

Теперь мы можем сравнить уравнения (113) и (114), Как видно, уравнение (113) не является уравнением Лежандра и потому имеет особые решения. Вернёмся к (112) и найдём частные решения при $n=0$, $n=1$ и $n=2$:

$$n=0, \quad \Theta = \frac{\gamma_0\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\delta_0}{\sin\theta}.$$

$$n=1,\quad \Theta=\gamma_1\left(-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}+\frac{1}{2}\sin\theta\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+\delta_1\sin\theta.$$

$$n=2,\quad \Theta=\gamma_2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}+\frac{3}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+\delta_2\sin\theta\cos\theta.$$

Из выражений для Θ следует, что коэффициенты γ_0, δ_0, γ_1 и γ_2 должны быть равны нулю во избежание бесконечности при $\theta=0$. Это означает, что нормализованными частными решениями уравнения (112) являются $\Theta_n=\delta_n P_n(\theta)$, где первые семь полиномов $P_n(\theta)$ могут быть представлены так:

$$P_0(\theta)=0,\qquad P_1(\theta)=\sin\theta,\qquad P_2(\theta)=\sin\theta\cos\theta,$$

$$P_3(\theta)=\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right),\qquad P_4(\theta)=\sin\theta\cos\theta\left(7\cos^2\theta-3\right),$$

$$P_5(\theta)=\sin\theta\left(21\cos^4\theta-14\cos^2\theta+1\right),\qquad P_6(\theta)=\sin\theta\cos\theta\left(33\cos^4\theta-30\cos^2\theta+5\right).\tag{115}$$

Согласно (109) $A_{o\phi}=R(r)\Theta(\theta)$, и тогда с учётом (111) и (115) находим зависимость компоненты $A_{o\phi}$ внешнего векторного потенциала от радиальной координаты r и от угла θ:

$$\begin{aligned}A_{o\phi}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n}{r^{n+1}}+\beta_n r^n\right)\delta_n P_n(\theta)=\left(\frac{\eta_1}{r^2}+\sigma_1 r\right)\sin\theta+\left(\frac{\eta_2}{r^3}+\sigma_2 r^2\right)\sin\theta\cos\theta+\\&+\left(\frac{\eta_3}{r^4}+\sigma_3 r^3\right)\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)+\left(\frac{\eta_4}{r^5}+\sigma_4 r^4\right)\sin\theta\cos\theta\left(7\cos^2\theta-3\right)+\\&+\left(\frac{\eta_5}{r^6}+\sigma_5 r^5\right)\sin\theta\left(21\cos^4\theta-14\cos^2\theta+1\right)+\\&+\left(\frac{\eta_6}{r^7}+\sigma_6 r^6\right)\sin\theta\cos\theta\left(33\cos^4\theta-30\cos^2\theta+5\right)+\ldots\end{aligned}\tag{116}$$

где $\sigma_n=\beta_n\delta_n$, $\eta_n=\alpha_n\delta_n$.

В (116) $\cos\theta = \dfrac{z}{r}$. При этом из симметрии потенциала относительно смены знака z следует, что потенциал может зависеть от z^2, но не от z. Следовательно, коэффициенты η_2, σ_2, η_4, σ_4, η_6, σ_6 и так далее должны равняться нулю. Если учесть ещё, что $\sin\theta = \dfrac{\rho}{r}$, $z^2 = r^2 - \rho^2$, из (116) следует:

$$A_{o\phi} = \rho\left[\sigma_1 + \frac{\eta_1}{r^3} + \left(\sigma_3 + \frac{\eta_3}{r^7}\right)\left(4r^2 - 5\rho^2\right) + \left(\sigma_5 + \frac{\eta_5}{r^{11}}\right)\left(8r^4 - 28\rho^2 r^2 + 21\rho^4\right) + \ldots\right]. \qquad (117)$$

В (117) коэффициенты σ_3, σ_5 и так далее должны быть равны нулю. Это следует из того, что в противном случае при больших значениях r и ρ векторный потенциал и магнитное поле будут неограниченно возрастать. Коэффициент σ_1 также должен равняться нулю, иначе при вычислении магнитного поля возникнет некоторая постоянная компонента магнитного поля вдоль оси OZ в направлении единичного вектора $\mathbf{e}_z$.

В соответствии с (105), (108-109) мы предполагаем, что в ближней зоне потенциал почти полностью определяется компонентой $A_{o\phi}$, так что $\mathbf{A}_o \approx A_{o\theta}\mathbf{e}_\theta$. На поверхности сферы внешний и внутренний векторные потенциалы должны совпадать и переходить друг в друга. С учётом вышеизложенного положим в (117) и в (103) $r = a$ и приравняем компоненты $A_{o\phi}$ и $A_{i\phi}$. В результате получаются соотношения для коэффициентов:

$$\frac{\eta_1}{a^3} + \frac{4\eta_3}{a^5} + \frac{8\eta_5}{a^7} = \frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l} \dfrac{c}{4\pi\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\,a}\sin\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - \\ -\dfrac{1}{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right) - \dfrac{4a^2}{15c^2} + \dfrac{32\pi\eta\rho_0 a^4}{315c^4} \end{array}\right].$$

$$-\frac{5\eta_3\rho^2}{a^7} - \frac{28\eta_5\rho^2}{a^9} = 0, \qquad \frac{21\eta_5\rho^4}{a^{11}} = -\frac{\rho_{0q}\gamma_c\omega^3\rho^4}{48c^4\varepsilon_0}.$$

Отсюда находим неизвестные коэффициенты и с их помощью уточняем компоненту векторного потенциала (117) в квадрупольном приближении:

$$\eta_1 = \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega a^3}{\varepsilon_0}\left[\begin{array}{l}\dfrac{c}{4\pi\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\,a}\sin\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)- \\ -\dfrac{1}{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-\dfrac{4a^2}{15c^2}+\dfrac{32\pi\eta\rho_0 a^4}{315c^4}-\dfrac{\omega^2 a^4}{70c^4}\end{array}\right],$$

$$\eta_3 = \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^3 a^9}{180c^4\varepsilon_0}, \qquad \eta_5 = -\frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega^3 a^{11}}{1008c^4\varepsilon_0}.$$

$$A_{o\phi} \approx \frac{\rho_{0q}\gamma_c \omega a^3 \rho}{\varepsilon_0 r^3}\left[\begin{array}{l}\dfrac{c}{4\pi\eta\rho_0\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\,a}\sin\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)- \\ -\dfrac{1}{4\pi\eta\rho_0}\cos\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{4\pi\eta\rho_0}\right)-\dfrac{4a^2}{15c^2}+\dfrac{32\pi\eta\rho_0 a^4}{315c^4}- \\ -\dfrac{\omega^2 a^4}{70c^4}+\dfrac{\omega^2 a^6\left(4r^2-5\rho^2\right)}{180c^4 r^4}-\dfrac{\omega^2 a^8\left(8r^4-28\rho^2 r^2+21\rho^4\right)}{1008c^4 r^8}+\ldots\end{array}\right]. \tag{118}$$

Подставим в (118) полный заряд сферы q_ω согласно (39), учтём соотношение $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ и перейдём к векторному потенциалу путём умножения $A_{o\phi}$ на единичный вектор $\mathbf{e}_\phi$:

$$\mathbf{A}_o \approx \frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2 \rho}{4\pi r^3}\mathbf{e}_\phi - \frac{4\mu_0 \rho_{0q}\gamma_c \omega a^5 \rho}{15r^3}\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{8\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}+\dfrac{3\omega^2 a^2}{56c^2}-\dfrac{\omega^2 a^4\left(4r^2-5\rho^2\right)}{48c^2 r^4}+ \\ +\dfrac{5\omega^2 a^6\left(8r^4-28\rho^2 r^2+21\rho^4\right)}{1344c^2 r^8}+\ldots\end{array}\right]\mathbf{e}_\phi. \tag{119}$$

Если в (119) пренебречь квадратной скобкой с членами, содержащими c^2 в знаменателе, и учесть приблизительное соотношение

$$q_\omega \approx q\gamma_c\left(1-\frac{3\eta m}{10ac^2}\right) \approx \frac{4\pi\rho_{0q}\gamma_c a^3}{3}, \tag{120}$$

вытекающее из (39), то получится внешний векторный потенциал вращающейся твёрдой сферы в дипольном приближении в стандартном виде:

$$\mathbf{A}_o \approx \frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2 \rho}{20\pi r^3}\mathbf{e}_\phi .$$

Магнитное поле в ближней зоне находится по формуле $\mathbf{B}_o = \nabla \times \mathbf{A}_o$ в (3) через векторный потенциал (119). Мы можем использовать выражение ротора в цилиндрических координатах (80), предварительно сделав в (119) замену $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_o &= -\frac{\partial A_{o\phi}}{\partial z}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_{o\phi}\right)}{\partial \rho}\mathbf{e}_z \approx \frac{3\mu_0 q_\omega \omega a^2 \rho z}{4\pi r^5}\mathbf{e}_\rho - \\
&-\frac{4\mu_0 \rho_{0q} \gamma_c \omega a^5 \rho z}{5r^5}\left[\begin{array}{l} 1-\dfrac{8\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}+\dfrac{3\omega^2 a^2}{56c^2}-\dfrac{\omega^2 a^4\left(20r^2-35\rho^2\right)}{144c^2r^4}+ \\ +\dfrac{5\omega^2 a^6\left(56r^4-252\rho^2r^2+231\rho^4\right)}{4032c^2r^8}-+\ldots \end{array}\right]\mathbf{e}_\rho + \\
&+\frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2\left(2r^2-3\rho^2\right)}{4\pi r^5}\mathbf{e}_z - \\
&-\frac{4\mu_0 \rho_{0q} \gamma_c \omega a^5\left(2r^2-3\rho^2\right)}{15r^5}\left[\begin{array}{l} 1-\dfrac{8\pi\eta\rho_0 a^2}{21c^2}+\dfrac{3\omega^2 a^2}{56c^2}-\dfrac{\omega^2 a^4\left(4r^2-5\rho^2\right)}{48c^2r^4}+ \\ +\dfrac{5\omega^2 a^6\left(8r^4-28\rho^2r^2+21\rho^4\right)}{1344c^2r^8}+\ldots \end{array}\right]\mathbf{e}_z - \\
&-\frac{4\mu_0 \rho_{0q} \gamma_c \omega a^5 \rho^2}{15r^5}\left[\frac{\omega^2 a^4\left(9r^2-10\rho^2\right)}{24c^2r^4}-\frac{5\omega^2 a^6\left(22r^4-63\rho^2r^2+42\rho^4\right)}{336c^2r^8}+\ldots\right]\mathbf{e}_z .
\end{aligned} \tag{121}$$

В дипольном приближении малые члены, содержащие c^2 в знаменателе в (121), не учитываются, и тогда выражение для магнитного поля в ближней зоне с учётом (120) упрощается:

$$\mathbf{B}_o \approx \frac{3\mu_0 q_\omega \omega a^2 \rho z}{20\pi r^5}\mathbf{e}_\rho + \frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2\left(2r^2-3\rho^2\right)}{20\pi r^5}\mathbf{e}_z .$$

Данное выражение может быть выражено в сферических координатах, если учесть, что $\rho = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $\mathbf{e}_\rho = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$:

$$\mathbf{B}_o \approx \frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2 \cos\theta}{10\pi r^3}\mathbf{e}_r + \frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2 \sin\theta}{20\pi r^3}\mathbf{e}_\theta .$$

При $\theta = 0$, когда единичный вектор $\mathbf{e}_r$ и внешнее магнитное поле направлены вдоль оси OZ, амплитуда магнитного поля в точка наблюдения на расстоянии r получается равной $B_o \approx \frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2}{10\pi r^3}$. Если же $\theta = \frac{\pi}{2}$, то точка наблюдения находится в плоскости экватора, единичный вектор $\mathbf{e}_\theta$ и магнитное поле направлены против оси OZ, а амплитуда магнитного поля при том же расстоянии r оказывается в два раза меньше, $B_o \approx \frac{\mu_0 q_\omega \omega a^2}{20\pi r^3}$.

6. Заключение

Любопытной особенностью вращающегося заряженного цилиндра является то, что при достаточно больших скоростях вращения внутреннее электрическое поле согласно (33) практически удваивается по сравнению со случаем покоящегося цилиндра. При этом в соответствии с (82), магнитное поле вращающегося цилиндра максимально вблизи оси цилиндра и стремится к нулю на поверхности цилиндра.

Поскольку электромагнитное поле цилиндра ввиду его симметрии относительно оси вращения определяется достаточно просто, совместное решение для полей цилиндра и вращающейся сферы позволяет лучше понять процедуру вычисления поля в случае сферической системы заряженных частиц, являющейся релятивистской однородной системой.

Так, скалярный потенциал φ_o в (71) за пределами сферы удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi_o = 0$ и на поверхности сферы при условии (70) наиболее точно соответствует внутреннему потенциалу (49). Потенциал φ_o приводит также к выражению для напряжённости внешнего поля (72), которое при условии (67) переходит в (73) и на поверхности сферы соответствует напряжённости внутреннего поля (50). Внутренний потенциал сферы удобно находить с помощью вспомогательного потенциала, который

может быть определён через Лоренцевское преобразование полей покоящейся сферы как φ_i^* в (41). Полученное выражение для потенциала подлежит обязательной калибровке с помощью калибровочной функции. Что касается внешнего потенциала φ_o, то он должен удовлетворять уравнению Лапласа и его лучше всего вычислять через полиномы Лежандра. Возникающие неизвестные коэффициенты в разложении внешнего потенциала находятся путём сравнения внешнего и внутреннего потенциалов на поверхности сферы.

Аналогично следует поступать и при вычислении векторного потенциала, с тем отличием, что вместо полиномов Лежандра потенциал содержит новые угловые полиномы (115), пропорциональные $\sin\theta$.

Полученные результаты имеют не только теоретическую ценность, но и выражаются в конкретных формулах для вычисления всех компонент электромагнитного поля. Это означает, что теперь во вращающейся релятивистской системе становится возможным вычислить энергию и момент импульс электромагнитного поля с увеличенной точностью, которая включает в себя дипольные электрические члены и квадрупольные магнитные члены. Тем самым полностью учитывается как собственное хаотическое движение заряженных частиц, так и их общее вращение в составе системы.

Ссылки на полученные в настоящей статье формулы для скалярных и векторных потенциалов, для электрического и магнитного полей приведены в Таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Указатель формул для внутреннего электромагнитного поля

	Скалярный потенциал	Электрическое поле	Векторный потенциал	Магнитное поле
Неподвижная сферическая система	$\varphi_i(\omega=0)$ (8)	$\mathbf{E}_i(\omega=0)$ (9)	$\mathbf{A}_i(\omega=0)=0$	$\mathbf{B}_i(\omega=0)=0$
Неподвижный твёрдый цилиндр	$\varphi_{ir}(\omega=0)$ (58)	$\mathbf{E}_{ir}(\omega=0)$ (19)	$\mathbf{A}_{ir}(\omega=0)=0$	$\mathbf{B}_{ir}(\omega=0)=0$
Неподвижная твёрдая сфера	$\varphi_{is}(\omega=0)$ (29)	$\mathbf{E}_{is}(\omega=0)$ (29)	$\mathbf{A}_{is}(\omega=0)=0$	$\mathbf{B}_{is}(\omega=0)=0$
Вращающийся твёрдый цилиндр	φ_{ir} (57)	$\mathbf{E}_{ir}$ (33)	$\mathbf{A}_{ir}$ (81)	$\mathbf{B}_{ir}$ (82)
Вращающаяся сферическая система	φ_i (49)	$\mathbf{E}_i$ (50)	$\mathbf{A}_i$ (102)	$\mathbf{B}_i$ (103)

Таблица 2. Указатель формул для внешнего электромагнитного поля

	Скалярный потенциал	Электрическое поле	Векторный потенциал	Магнитное поле
Неподвижная сферическая система	$\varphi_o(\omega=0)$ (11)	$\mathbf{E}_o(\omega=0)$ (11)	$\mathbf{A}_o(\omega=0)=0$	$\mathbf{B}_o(\omega=0)=0$
Неподвижный твёрдый цилиндр	$\varphi_{or}(\omega=0)$ (58)	$\mathbf{E}_{or}(\omega=0)$ (22)	$\mathbf{A}_{or}(\omega=0)=0$	$\mathbf{B}_{or}(\omega=0)=0$
Неподвижная твёрдая сфера	$\varphi_{os}(\omega=0)$ (28)	$\mathbf{E}_{os}(\omega=0)$ (28)	$\mathbf{A}_{os}(\omega=0)=0$	$\mathbf{B}_{os}(\omega=0)=0$
Вращающийся твёрдый цилиндр	φ_{or} (57)	$\mathbf{E}_{or}$ (35)	$\mathbf{A}_{or}$ (85)	$\mathbf{B}_{or}\approx 0$ (86)
Вращающаяся сферическая система	φ_o (71)	$\mathbf{E}_o$ (72)	$\mathbf{A}_o$ (119)	$\mathbf{B}_o$ (121)

Список использованных источников

1. Fedosin S.G. Four-Dimensional Equation of Motion for Viscous Compressible and Charged Fluid with Regard to the Acceleration Field, Pressure Field and Dissipation Field. International Journal of Thermodynamics. Vol. 18, No. 1, pp. 13-24 (2015). http://dx.doi.org/10.5541/ijot.5000034003. // Четырёхмерное уравнение движения вязкого сжимаемого заряженного вещества с учётом поля ускорений, поля давления и поля диссипации.

2. Fedosin S.G. Estimation of the physical parameters of planets and stars in the gravitational equilibrium model. Canadian Journal of Physics, Vol. 94, No. 4, pp. 370-379 (2016). http://dx.doi.org/10.1139/cjp-2015-0593. // Оценка физических параметров планет и звёзд в модели гравитационного равновесия.

3. Fedosin S.G. The virial theorem and the kinetic energy of particles of a macroscopic system in the general field concept. Continuum Mechanics and Thermodynamics, Vol. 29, Issue 2, pp. 361-371 (2017). https://dx.doi.org/10.1007/s00161-016-0536-8. // Теорема вириала и кинетическая энергия частиц макроскопической системы в концепции общего поля.

4. Fedosin S.G. Energy and metric gauging in the covariant theory of gravitation. Aksaray University Journal of Science and Engineering, Vol. 2, Issue 2, pp. 127-143 (2018). http://dx.doi.org/10.29002/asujse.433947. // Калибровка энергии и метрики в ковариантной теории гравитации .

5. Fedosin S.G. The integral theorem of generalized virial in the relativistic uniform model. Continuum Mechanics and Thermodynamics, Vol. 31, Issue 3, pp. 627-638 (2019). http://dx.doi.org/10.1007/s00161-018-0715-x. // Интегральная теорема обобщённого вириала в релятивистской однородной модели.

6. Fedosin S.G. The potentials of the acceleration field and pressure field in rotating relativistic uniform system. Continuum Mechanics and Thermodynamics, Vol. 33, Issue 3, pp. 817-834 (2021). https://doi.org/10.1007/s00161-020-00960-7. // Потенциалы поля ускорений и поля давления во вращающейся релятивистской однородной системе.

7. Griffiths, D.J.: Introduction to Electrodynamics, 3rd edn. Prentice Hall, Upper Saddle River (2007).

8. Redzic D.V. Electromagnetostatic charges and fields in a rotating conducting sphere. Progress In Electromagnetics Research, Vol. 110, pp. 83-401 (2010). http://dx.doi.org/10.2528/PIER10100504.

9. Gron O. and Voyenli K. Charge distributions in rotating conductors. European Journal of Physics, Vol. 3, Number 4, pp. 210-214 (1982). https://doi.org/10.1088/0143-0807/3/4/004.

10. Marsh J.S. Magnetic and electric fields of rotating charge distributions. American Journal of Physics, Vol. 50, Issue 1, pp. 51-53 (1982). https://doi.org/10.1119/1.13006.

11. Marsh J.S. Magnetic and electric fields of rotating charge distributions II. American Journal of Physics, Vol. 52, Issue 8, pp. 758-759 (1984). https://doi.org/10.1119/1.13852.

12. Healy W.P. Comment on 'The effect of radial acceleration on the electric and magnetic fields of circular currents and rotating charges'. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 35, pp. 2527-2531 (2002). https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/10/403.

13. Díaz G.A., Mombello E.E., Stephan V. Magnetic vector potential and magnetic field intensity due to a finite current carrying cylinder considering a variable current density along its axial dimension. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 40, no. 2, pp. 133-147 (2012). https://doi.org/10.3233/JAE-2012-1434.

14. Fedosin S.G. The Integral Energy-Momentum 4-Vector and Analysis of 4/3 Problem Based on the Pressure Field and Acceleration Field. American Journal of Modern Physics, Vol. 3, No. 4, pp. 152-167 (2014). doi: 10.11648/j.ajmp.20140304.12; Интегральный 4-вектор энергии-импульса и анализ проблемы 4/3 на основе поля давления и поля ускорений.

15. Fedosin S.G. The electromagnetic field in the relativistic uniform model. International Journal of Pure and Applied Sciences, Vol. 4, Issue. 2, pp. 110-116 (2018). http://dx.doi.org/10.29132/ijpas.430614. // Электромагнитное поле в релятивистской однородной модели.

16. Fedosin S.G. On the Covariant Representation of Integral Equations of the Electromagnetic Field. Progress In Electromagnetics Research C, Vol. 96, pp. 109-122 (2019). https://doi.org/10.2528/PIERC19062902. // О ковариантном представлении интегральных уравнений электромагнитного поля.

17. Fedosin S.G. The procedure of finding the stress-energy tensor and vector field equations of any form. Advanced Studies in Theoretical Physics, Vol. 8, No. 18, pp. 771-779 (2014). http://dx.doi.org/10.12988/astp.2014.47101. // Процедура для нахождения тензора энергии-импульса и уравнений векторного поля любого вида.

18. Fedosin S.G. The electromagnetic field outside the steadily rotating relativistic uniform system, Preprint, accepted 24 June 2021 for publication by Jordan journal of physics.

Источник: http://sergf.ru/ef.pdf

На научный сайт